Российская академия наук
Российская академия образования
Издательство «Просвещение»

БАЗОВЫЙ • УГЛУБЛЁННЫЙ
УРОВНИ

Учебно-методический комплект включает:

- А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик
  ГЕОМЕТРИЯ
  Учебник
- Л. П. Евстафьева
  ГЕОМЕТРИЯ
  Дидактические материалы
- А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик, Л. П. Евстафьева
  ГЕОМЕТРИЯ
  Методические рекомендации
- В. И. Рыжик
  ГЕОМЕТРИЯ
  Контрольные измерительные материалы профильного уровня
- **Программы общеобразовательных учреждений. Геометрия. 10 – 11 классы**

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Российская академия наук
Российская академия образования
Издательство «Просвещение»

Методические рекомендации

Геометрия

10 11

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Российская академия наук
Российская академия образования
Издательство «Просвещение»

Геометрия

Методические рекомендации

10–11 классы

Пособие для учителей общеобразовательных организаций

Москва
«Просвещение»
2013

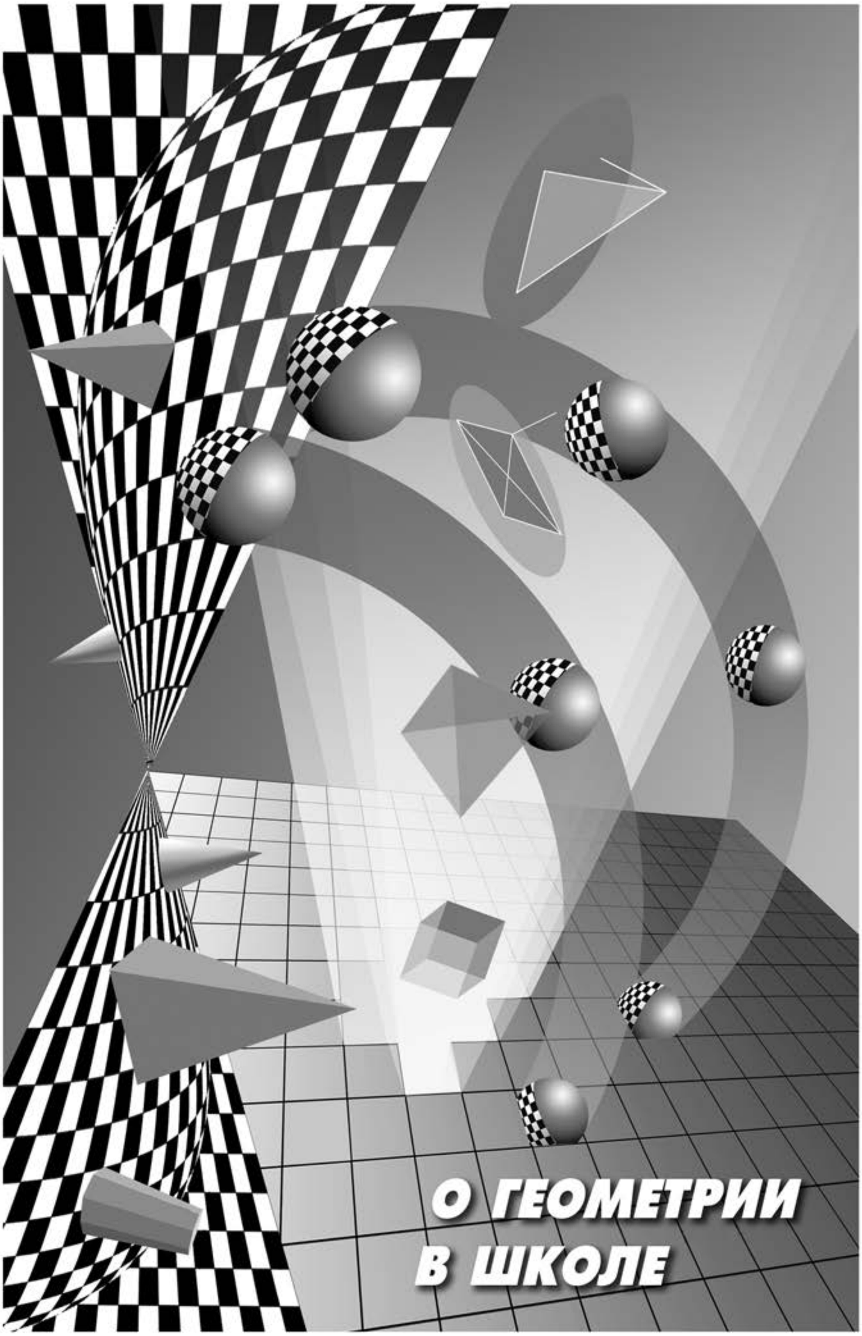
УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
Г36

Авторы:
А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик, Л. П. Евстафьева

Г36 **Геометрия.** Методические рекомендации. 10—11 классы : Пособие для учителей общеобразоват. организаций / [А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик, Л. П. Евстафьева]. — М. : Просвещение, 2013. — 144 с.: ил.

Пособие предназначено в помощь учителю, преподающему геометрию в 10—11 классах по учебнику авторов А. Д. Александрова, А. Л. Вернера, В. И. Рыжика. В пособии рассказано о структуре учебника, даны решения задач, приведены тесты, поурочное планирование и контрольные работы, статья академика А. Д. Александрова о преподавании геометрии в школе.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21


О ГЕОМЕТРИИ
В ШКОЛЕ

Предисловие

Эта книга обращена к учителям математики старших классов, преподающим геометрию по учебнику «Геометрия. 10—11 классы» А. Д. Александрова, А. Л. Вернера, В. И. Рыжика для базового и углубленного уровней. Данный учебник по геометрии для 10 и 11 классов базируется на трех составляющих, изначально присущих геометрической науке: пространственном воображении, логическом мышлении и практическом понимании.

На *базовом уровне* учебник ориентирован на обеспечение преимущественно общеобразовательной и общекультурной подготовки. На *углубленном уровне* дополнительно ведется более строгое изучение теоретического материала, решение более разнообразных и сложных задач, подготовка к профессиональной деятельности, предполагающей систематическое применение математики.

По этому учебнику возможно как изучение геометрии на углубленном уровне по 2 часа в неделю в течение двух лет, так и ее изучение на базовом уровне ориентировочно по 1,5 часа в неделю в 10 и 11 классе. Авторами разработаны программы и примерное поурочное планирование для таких вариантов изучения геометрии по этому учебнику.

Дифференцированность содержания учебника позволяет каждому ученику выбрать индивидуальную траекторию при работе по нему.

Хотя учебник в основной своей части посвящен изучению стереометрии, но его планиметрические разделы дополняют его до всего курса элементарной геометрии.

Содержательные и структурные особенности учебника «Геометрия»

Содержание программы, соответствующей учебнику «Геометрия, 10—11», охватывает весь раздел «Геометрия» «Фундаментального ядра содержания общего образования». Курс стереометрии в учебниках А. Д. Александрова построен так, что изучать его можно после любого учебника геометрии в основной школе, поскольку плоскость в нем определяется как фигура, на которой выполняется евклидова планиметрия. Каким образом в основной школе была построена планиметрия, не играет никакой роли, так как важнейшие факты евклидовой планиметрии были установлены в любом курсе геометрии основной школы.

<u>В структуре курса стереометрии выделяются три линии:</u> первая линия — это линия *геометрии построений* изучаемых фигур, вторая линия — это линия *геометрии вычислений* величин построенных фигур, а третья линия — это линия *идей и методов современной геометрии*. Ведущей в 10 классе яв-

ляется линия *геометрии построений* (глава 1 «Основания стереометрии» и глава 2 «Перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей»), а в 11 классе ведущими становятся линия геометрии вычислений (глава 5 «Объемы тел и площади их поверхностей») и линия *идей и методов современной геометрии* (глава 6 «Координаты и векторы»).

Две центральные главы учебника «Геометрия, 10—11» — глава 3 «Фигуры вращения» (10 класс) и глава 4 «Многогранники» (11 класс) — посвящены основному предмету стереометрии — геометрическим телам и их поверхностям. Они носят во многом описательный, наглядный характер. Много внимания в этих главах уделяется *симметрии* изучаемых тел — важнейшему общекультурному понятию.

Элементы планиметрии, содержащиеся в углубленном курсе геометрии, распределены авторами равномерно по всему учебнику и включены в близкие по тематике разделы стереометрии. Так сделано, чтобы планиметрический материал не отодвигал на второй план важнейшую задачу курса геометрии в старших классах — изучение стереометрии. Это также позволяет на высоком уровне сохранять планиметрическую подготовку старшеклассников.

Задачный материал учебника достаточно многогранный. Задания разделяются на соответствующие базовому уровню и углубленному. Даже некоторые пункты одной задачи предназначены для базового, а другие — для углубленного уровня. Более трудные задачи отмечены специальным значком. В задачах выделяются рубрики по видам деятельности. Кроме того, что надо сделать, решая задачу, в большинстве условий сказано в утвердительной форме: *Нарисуйте, Вычислите, Докажите, Постройте, Найдите границы* и т. п. Но условия многих задач содержат и вопросы: «*Как найти...?*», «*Как построить...?*», «*Как вычислить...?*» и т. п. В этих задачах главное составить алгоритм решения. Еще одна группа задач содержит вопросы другого типа: «*Есть ли...?*», «*Можно ли...?*», «*Верно ли...?*», «*Какой по форме...?*», «*Какого вида...?*» и др. Это задачи исследовательского характера. Задачи к параграфу обычно начинаются с небольшого числа задач, *дополняющих теорию*. На такие задачи возможны в дальнейшем ссылки наравне с теоретическим текстом. В учебнике предлагаются задачи к главам. Они многоплановы и имеют итоговый характер.

В учебнике сделаны следующие изменения по сравнению с предыдущими изданиями. Добавлены пункты 24.8 «Золотое сечение» и 24.9 «Полуправильные многогранники». В начале каждой главы рассказано об ее содержании, а в конце в кратких «Итогах» говорится о важнейших результатах этой главы. В разделах «Задачи к главам» добавлены задачи для работы с компьютером. В задачном материале выделены в отдельные рубрики задачи, которые дополняют теоретический материал, задачи исследовательского характера и задачи прикладного содержания. Обновлен иллюстративный материал, многие рисунки заменены фотографиями. Добавлен список литературы.

Достижение образовательных результатов обучения

Работа по данному учебнику обеспечивает реализацию трех групп образовательных результатов, сформулированных в Федеральном государственном образовательном стандарте среднего общего образования: личностных, метапредметных, предметных.

Приведем примеры.

Личностные результаты

Важнейшая особенность курса геометрии, изложенного в учебнике, в том, что этот курс представляет собой систему *доказанных выводов*, а не просто набор фактов, сообщенных ученику. Это учит старшеклассников требовать доказательств, вырабатывает у них стремление к истине, формирует их научное мировоззрение, воспитывает активную гражданскую позицию, а потому имеет чрезвычайно важный нравственный потенциал.

Курс соответствует современному уровню развития науки. В нем рассказывается о современной геометрии в *заключении* учебника.

Методологической основой учебника является системно-деятельностный подход, который позволяет формировать у школьников готовность к саморазвитию, активность в обучении, выбирать для учащихся индивидуальные траектории обучения. Дифференциации обучения способствует и *разделение задач* на *базовые*, т. е. обязательные для всех, и более трудные задачи для *углубленного изучения* по выбору. В учебнике даются задачи, дополняющие теорию, способствующие саморазвитию в данной предметной области (например, 13.1, 16.3 и др.). Задания под рубрикой «прикладная геометрия» помогают понять связь геометрии с жизнью и учат ответственности при принятии решения (например, № 8.3, 11.5). Задания под рубрикой «исследуем» способствуют формированию творческой активности (например, № 20.27, 23.13).

Задания под рубрикой «исследуем» предполагают сотрудничество и умение вести диалог для их успешного решения. Это, по сути, проектные задачи. См., например, задачи 1.13, 11.6, 16.11 и др.

О том, что геометрия является частью общечеловеческой культуры, о том, что она изучает и описывает реальные процессы и явления, в учебнике говорится, начиная с п. 1 Введения. Имена выдающихся людей присутствуют на страницах учебника — Ньютон и Ломоносов, Платон и Аристотель, Декарт и Ферма, Лобачевский и Гильберт и т. д.

С истории геометрии А. Д. Александров начинал свой курс в учебнике для 7 класса, этой *историей* был пронизан весь пятилетний курс геометрии, а завершается он подробным рассказом о современной геометрии в данном учебнике для 10—11 классов, о развитии геометрических представлений человека об окружающем его мире.

Готовность к продолжению образования предоставляют многочисленные сведения о развитии геометрии на протяжении веков и рассказ о различных геометриях в конце учебника (см. с. 238—247). Самообразование в данной области возможно с помощью книг по математике, список которых представлен в учебнике (см. с. 254, 255).

Эстетическое воздействие изучения геометрии возникает при изучении правильных геометрических форм (см. пункты 24.1, 24.2 и др.), симметрии фигур (см. пункт 24.7), реализации этих правильных форм в памятниках архитектуры — «застывшей геометрии» (см., например, с. 68, 73, 116, 153 и др.). Этому в учебнике уделяется внимание, для обсуждения таких вопросов выделены специальные параграфы и пункты.

Метапредметные результаты

Умение планировать свою деятельность возможно через составление плана решения при выполнении задач рубрики «исследуем», а для контроля и коррекции понимания текста после изучения теории даются «вопросы для самоконтроля». Умение продуктивно общаться формируется при решении задач, обсуждении различных вариантов решения, в том числе и неверного. Например, при решении задач, в которых нужно построить какое-либо изображение, возможен обмен рисунками (см. № 23.4, 23.5 и др.).

Готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности реализуется при чтении дополнительной литературы по предмету и использования интернет-ресурсов из «списка литературы». Умение использовать средства информационных и коммуникационных технологий в решении когнитивных, коммуникативных и организационных задач формируется при решении задач рубрики «применяем компьютер» (см., например, задачи к главе III на с. 152).

Владение языковыми средствами, а точнее геометрическим языком, обеспечивается при решении геометрической задачи. Оно формируется при обосновании каждого логического хода в доказательстве и опоре на аксиомы и ранее известные факты. Это можно проследить на примере решения практически любой задачи учебника.

Предметные результаты

Базовый уровень

Понимание возможности аксиоматического построения математических теорий возникает после прочтения первой главы. Глава 1 «Основания стереометрии» содержит § 1 «Аксиомы стереометрии». Поэтому аксиоматическое построение математических теорий имеет непосредственное отношение к курсу геометрии.

Владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач обеспечиваются при решении задач из учебника.

Владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, знание их основных свойств; формирование умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием возможно при изучении теоретического материала и задач учебника.

Приобретение навыков использования готовых компьютерных программ при решении задач обеспечивает решение задач рубрики «применяем компьютер».

Углубленный уровень

Формирование представлений учащихся о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений и роли аксиоматики в проведении дедуктивных рассуждений можно проиллюстрировать на примере изложения теории в § 9 и 10.

Понятийный аппарат по основным разделам курса математики; знания основных теорем, формул и умения их применять, а также умения доказывать теоремы и находить нестандартные способы решения задач формируются при решении различных задач учебника. Например, в учебнике разбирается решение задачи 15.10 на с. 108 с учетом знаний разобранной теоремы, дальнейшего применения полученной формулы для упрощения решения решенной ранее задачи и др.

Моделирование реальной ситуации, исследование построенных моделей и интерпретирование полученного результата можно получить, решая отдельные задачи учебника. См., например, задачу 21.17 о спичечном коробке или задачу 26.4 о цилиндре.

О геометрии в школе[1]

Наше среднее образование страдает перегрузкой. Но даже постановления, обязывающие преодолеть эту болезнь, не ведут к радикальным результатам: каждый специалист настаивает на том, что без «его» предмета, без таких-то и таких-то разделов обойтись никак невозможно. Но если спросят: почему? — то последует ответ: это невозможно никак, потому что никак невозможно... ибо образование и состоит в наполнении человека знаниями. Однако по более глубокому пониманию цель среднего образования состоит в том, чтобы дать человеку основные, практически нужные знания и развить его личность, развить духовно — в умственном и нравственном отношении (последнее и есть самое главное). Поэтому вопрос о нужности любого школьного предмета, о необходимости того или иного его раздела сводится к практической надобности и значению в развитии личности. При этом выясняется, что кое-что, а то и довольно многое можно исключить из программ без сожаления, а кое-что следовало бы и добавить. Только решить этот вопрос для каждого предмета не очень просто, поэтому его решение заменяют уверениями в надобности «своего» предмета.

Понимание того, что практически нужно в данном предмете и что в нем может служить развитию личности, должно определить и содержание предмета, и постановку его преподавания. В конечном счете это понимание должно служить основой для решения всех вопросов преподавания.

Мы рассмотрим в этом плане курс геометрии, особенно стереометрии, прежде всего с точки зрения его роли в развитии личности. Одним из результатов нашего рассмотрения будет вывод, что из программы стереометрии полезно исключить целых два раздела.

1. Противоречивая сущность геометрии

Особенность геометрии, выделяющая ее не только среди остальных частей математики, но и среди других наук вообще, состоит в том, что в ней строгая логика соединена с наглядным представлением. Геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в котором они взаимно организуют и направляют друг друга.

Воображение дает непосредственное ви́дение геометрического факта и подсказывает логике его выражение и доказательство, а логика придает точность воображению и на-

[1] Опубликовано под названием «О геометрии» в журнале «Математика в школе» (1980. — № 3).

правляет его к созданию картин, обнаруживающих нужные логические связи.

Это, несомненно, так для трехмерной евклидовой геометрии. Но в содержательном основании неевклидовой и многомерной геометрии тоже лежат наглядные представления, хотя бы обобщенные; без них любой раздел геометрии, естественно, перестает быть геометрией. Но здесь мы будем говорить не о всей геометрии, а о той ее части, которая изучается в школе, и при этом специально о стереометрии.

Именно в стереометрии указанная особенность геометрии выступает наиболее ярко. Во-первых, потому что в ней требуется пространственное воображение. Факты планиметрии изображаются на доске и на бумаге в их подлинном виде (не считая того, что нельзя нарисовать бесконечную прямую без всякой толщины и т. п.). Но факты стереометрии изображаются условно и потому не могут быть верно восприняты без дополнительного пространственного представления, а оно составляет известную трудность, нередко значительную. Во-вторых, стереометрия изучается в последних классах школы, когда учащиеся должны быть достаточно развиты для того, чтобы воспринять логику дедуктивного изложения. Поэтому курс стереометрии можно и следует строить с большей логической последовательностью и доказательностью, чем курс планиметрии.

Таким образом, мы с бóльшим правом можем повторить о курсе стереометрии то, что было сказано о геометрии вообще. Стереометрия и должна быть преподана в соединении наглядности и логики, как живое пространственное воображение, пронизанное и организованное строгой логикой.

Живое воображение скорее ближе искусству, строгая логика — привилегия науки. Они, можно сказать, совершенные противоположности («лед и пламень не столь различны меж собой»). Однако геометрия их все же соединяет, и задача преподавания — соединить их в одном учебном предмете.

Это есть реальное взаимопроникновение, единство противоположностей, противоречие в самой сущности предмета, которое не может быть устранено иначе, как уничтожением самого предмета, т. е. ликвидацией курса геометрии и заменой его чем-то другим. Это противоречие составляет особую трудность, но вместе с тем и особую прелесть геометрии. Трудно сочетать столь противоположные свойства, как живость воображения и строгость мысли, но зато, когда их единство осуществляется, достигается большая ясность понимания и радость непосредственного «видения» истины.

В курсе геометрии соединяются еще две противоположности: абстрактная математическая геометрия и «реальная геометрия» — пространственные отношения и свойства материальных тел. Это противоречие выступает уже в тот момент, когда на доске «проводят прямую» и говорят: «Проведем прямую через точки A и B». Но на доске нет точек и невозможно провести прямую: геометрические точки и прямые — это идеальные объекты, они не существуют иначе, как в абстрактном мышлении, их, в строгом смысле, нельзя даже представить, а можно только мыслить.

Утверждения геометрии высказываются и доказываются для идеальных геометрических объектов, но воспринимаются как утверждения об объектах, наглядно представимых, и применяются к реальным вещам, в которых идеальные объекты геометрии реализуются нередко очень условно. Стереометрия начинается с того, что «через три точки проходит плоскость». Но показать это реально можно лишь с чрезвычайной условностью. Плоскость в реальности — это либо плоский предмет, либо плоская поверхность предмета, т. е. не геометрическая плоскость как таковая, тем более бесконечная.

При всей своей абстрактности геометрия возникла из практики и применяется в практике. Поэтому преподавание геометрии обязательно должно связывать ее с реальными вещами, с другими дисциплинами, особенно с физикой (и через приложения, и в иллюстрациях геометрических понятий и утверждений, и в определениях основных понятий).

Например, в действующем курсе геометрии перемещение определяют как отображение всего пространства или (в планиметрии) всей плоскости. Но это нелепо. На самом деле перемещают предметы. Соответственно в курсе геометрии нужно начинать с понятия о перемещении фигур как образе реальных перемещений предметов с одного места на другое[2], что отвечает наглядному представлению и удобно в геометрии (например, если нужно одновременно переместить две фигуры так, чтобы они покрыли данную точку). При всем этом связь геометрии с реальностью заключает противоречие — несоответствие реальных вещей геометрическим абстракциям.

Таким образом, преподавание геометрии должно включать три тесно связанных, но вместе с тем и противоположных элемента: логику, наглядное представление, применение к реальным вещам. Этот «треугольник» составляет, можно сказать, душу преподавания геометрии; воображение ближе к реальности. Задача преподавания геометрии — развить у учащихся соответствующие три качества: пространственное воображение, практическое понимание и логическое мышление.

Разумеется, одна из задач курса геометрии — дать учащимся основные понятия и умения в области геометрии.

---

[2] Перемещение материальной точки с одного места на другое — из геометрической точки A в точку B и осуществляет отображение A на B.

Однако все же главные, глубинные задачи преподавания геометрии заключены в трех указанных элементах, во-первых, ввиду их значения для общего развития, во-вторых, потому что они уже включают основное из тех знаний, которые должен давать курс геометрии. Поэтому остановимся сначала на этих элементах.

2. Воображение и реальность

Воображение — это прекрасная и могущественная способность человека. Что являет собой в подавляющей части искусство и техника, как не воплощенное воображение! Научные идеи и теории также оказываются в большей мере его порождениями. Пространственное воображение, развитию которого служит геометрия, составляет важный компонент в общей способности человека к воображению и имеет существенное значение в ряде отношений. Оно, разумеется, вообще необходимо человеку для ориентировки в окружающем мире и в развитой форме существенно для многих видов деятельности. Оно нужно квалифицированному рабочему, инженеру, архитектору, авиатору, скульптору и т. д. Вместе с тем развитие пространственного воображения расширяет ви́дение мира, делает его более пространственно выпуклым и содержательным подобно тому, что делает стереоскоп с плоскими снимками. Развитое воображение обогащает внутренний мир человека, давая ему возможность создавать в себе и созерцать разнообразные картины.

Словом, развитое пространственное воображение — это важный элемент общей культуры. Геометрия, требуя воображать геометрические образы в их идеальной точности и логической определенности, дает этим пространственному воображению утонченность и точность.

Великий архитектор нашего века Ле Корбюзье писал:

«Геометрия есть средство, с помощью которого мы воспринимаем среду и выражаем себя.

Геометрия — это основа.

Кроме того, она является материальным воплощением символов, выражающих все совершенное, возвышенное.

Она доставляет нам высокое удовлетворение своей математической точностью.

Машина идет от геометрии. Следовательно, человек нашей эпохи своими художественными впечатлениями обязан в первую очередь геометрии. После столетия анализа современное искусство и современная мысль рвутся за пределы случайного, и геометрия приводит их к математическому порядку и гармонии. Эта тенденция усиливается с каждым днем»[3].

---

[3] *Ле Корбюзье.* Градостроительство // Ле Корбюзье. Архитектура XX века. — М., 1977. — С. 25.

Во вдохновенных словах Корбюзье геометрия воспета в ее воплощении в реальных вещах, в единстве геометрического образа и его материального осуществления. «Машина идет от геометрии», вся техника пронизана геометрией и начинается с геометрии, ибо всюду, где нужна малейшая точность размеров и формы, где нужна структурность взаимного расположения частей, вступает в силу геометрия.

Конструктор, рабочий-изобретатель, инженер представляют себе сначала примерный вид создаваемой детали или конструкции, чертят, уточняют, делают модели; наконец, складывается точное представление, делаются рабочие чертежи, и по ним воссоздают пространственный вид предмета, изготовляют его. Так происходит взаимодействие пространственного воображения, изображения на чертеже и реального воплощения в модели или в готовом предмете.

В механике и в физике геометрические представления также играют фундаментальную роль уже потому, что движение, процессы происходят в пространстве. Вспомним хотя бы кинематику и геометрическую оптику. Вспомним еще строение кристаллов, пространственные модели сложных молекул, симметрию живых организмов и др.

О значении пространственных представлений в изобразительном искусстве и архитектуре говорить не приходится — оно очевидно. Отметим, между прочим, что посвященная искусству книга одного из самых выдающихся советских художников Петрова-Водкина называется «Пространство Евклида».

Ученику нужно показать эти реальные связи и воплощения геометрии в жизни, в природе, в искусстве, в технике и науке, чтобы геометрия предстала перед ним не как сухой предмет, подлежащий зубрежке и сдаче на экзамене, а как полное содержания, значения и красоты явление культуры, как наука в ее связях с реальными вещами.

Пространственные представления, геометрическая интуиция играют существеннейшую роль вне геометрии и в самой математике. Математический анализ немыслим без геометрических образов, начиная с числовой прямой, графиков функций и т. д. Эта роль геометрии сказалась в нашем веке в создании функционального анализа, занявшего с его основным понятием пространства функций центральное место в современной математике. Чтобы не возбудить подозрений в стремлении автора-геометра расхвалить свою науку, сошлюсь на суждение одного нашего выдающегося математика другой специальности: «Пространства функций в большинстве случаев бесконечномерны, но возможность направленно воспитать и затем применить к ним первоначально развитую конечномерную (даже трехмерную) интуицию оказалось исключительно плодотворным открытием»[4].

[4] *Манин Ю. И.* Математика и физика. — М., 1979. — С. 10.

Этот пример — формирование громадной области науки по указаниям геометрической интуиции — с большой силой показывает нам ту направляющую роль, какую играет геометрическое воображение в его союзе с логикой. Точно так же должно быть и в школьном преподавании.

Изложение любого элемента курса — будь то аксиома, определение, теорема, задача — должно начинаться с наглядной картины, которую учащиеся и должны усвоить в первую очередь. Надо, чтобы ученик представлял себе, допустим, что такое пирамида, мог описать ее, мог решить касающуюся ее простую задачу. А если при этом он не может безошибочно произнести точного ее определения, в этом еще нет большой беды.

Существенно наглядно-оперативное знание предмета, содержащее наглядные представления и умения правильно ими оперировать. Все представляют себе, что такое стул, и умеют им пользоваться, но, наверное, многие затруднятся дать сразу, как на экзамене, определение: «Стулом называется...» У математиков XVII — XVIII вв. не было точных определений ни функции, ни предела, ни самого переменного x, но они действовали с замечательным успехом (вспомним хотя бы Эйлера).

Педантичное стремление дать каждому понятию словесное определение может вести к тому, что вместо пояснения и уточнения представлений, которые уже есть у учащихся, вместо формирования у них новых ясных понятий им дается нечто трудно представимое или вовсе невообразимое, а лишь выраженное в словесной оболочке, порой такой, что они не могут ни понять сказанное, ни применить. Например, в действующих учебниках дается определение: «Направлением называется множество всех сонаправленных лучей». И так как ученикам уже внушали, что множество — это собрание элементов и оно состоит из своих элементов, то выходит, что направление состоит из всех сонаправленных лучей. Интуитивное понятие направления, свойственное каждому человеку, заменяется чем-то невообразимым и к тому же совершенно бесполезным, поскольку таким понятием направления никто, собственно, не пользуется. Сходное положение обнаруживается с определениями понятий вектора, многогранника и др.

Вряд ли есть что-либо более вредное для духовного — умственного и морального — развития, чем приучать человека произносить слова, смысл которых он толком не понимает и при необходимости руководствуется другими понятиями.

Однако мы свернули на критику существующих учебников, которая сейчас не входит в нашу задачу. О них стоило упомянуть лишь затем, чтобы ярче оттенить важность наглядности и не дать подумать, что, всячески подчеркивая ее значение, мы ломимся в открытые двери. Вовсе нет! Есть все основания четко выдвинуть и подчеркнуть как первый основной принцип преподавания геометрии: каждый элемент курса геометрии должен опираться на возможно более простое и ясное наглядное представление, с такого представления надо начинать и им руководствоваться в изложении. Соответственно этому изложение следует начинать с наглядной картины — с рисунка на доске, описания, показа модели, примеров.

В стереометрии существенно именно рисовать, чтобы вызвать пространственное представление, пользуясь, например, штриховкой, оттеняющей грани многогранника, и т. п. (в этой связи заметим в скобках, что на физико-математических и естественных факультетах педагогических институтов полезно было бы ввести занятия по специальному рисованию).

Вместе с рисунком должно идти разъяснение его пространственного содержания, возбуждающее верное пространственное представление. Одновременно нужно разъяснить также точный геометрический смысл изображаемого — пронизать и организовать наглядное представление точной логикой. Тут же необходимо, если это не сделано ранее, дать реальные примеры из жизни, из техники и т. п. Логически организованное представление дает нужную формулировку определения, теоремы или задачи. За этим вступают в действие логические доказательства.

Геометрический метод и состоит в том, что само логическое доказательство или решение задачи направляется наглядным представлением; лучше всего, когда доказательство или решение, можно сказать, видно из наглядной картины. В старинных индийских сочинениях бывало так, что доказательство сводилось к чертежу, подписанному одним словом «Смотри!». При прочих равных условиях следует предпочесть наглядный вывод вычислительному и ради наглядности можно жертвовать логической точностью и обоснованностью. Так, полезно привлекать наглядные соображения непрерывности, наглядно представляемые движения точек и фигур и другие образы, заимствованные даже из механики и физики (сам Архимед пользовался механическими соображениями в своих геометрических выводах, хотя, конечно, окончательное оформление их совершал со всей строгостью).

К тому же подходу должен быть приучен и ученик — начинать с рисунка, с наброска, наглядного описания — отвечает ли он у доски, учит ли что-нибудь дома, решает ли задачу; рисунку должны сопутствовать пространственное представление, точное понимание и т. д.

Насколько важно сочетание ясного наглядного представления и точного понимания и насколько опасно пренебречь им, можно видеть на примере определения многогранника, данного в учебнике для 10—11 классов. Это определение так усложнено и запутано, что его рекомендуют и не спрашивать у учеников. И не мудрено: авторы учебника сами запутались в своем определении, и оно оказалось неверным! На рисунке учебника по геометрии для 7—9 классов изображены пять многогранников, два из них не подпадают под определение, данное в учебнике для 10—11 классов. А произошло это потому, что авторы не смогли соединить должным образом наглядное представление о многограннике с логической точностью формулировок.

Итак, изложение всякого раздела курса начинается с картины, с наглядного представления, обращается к логике формулировок и выводов, а затем полученное знание применяется и закрепляется при рассмотрении примеров и решении задач. Этот общий порядок изложения можно характеризовать кратко словами В. И. Ленина о пути познания вообще: «От живого созерцания к абстрактному мышлению *и от него к практике* — таков диалектический путь познания *истины*, познания объективной реальности»[5].

Таким путем, скажем мы, и должно идти познание учащимися геометрии.

3. Логика и мировоззрение

Пока мы больше говорили об исходном пункте — о «живом созерцании»; обратимся ко второму — к «абстрактному мышлению», к тому элементу «треугольника», изображающего сущность геометрии, который был обозначен как логика.

С давних пор общепризнано, что курс геометрии должен учить логическому мышлению, и было бы лишним распространяться здесь на эту тему, но все же представляется необходимым обратить внимание на некоторые моменты.

По-видимому, есть серьезная опасность, что многие учащиеся не столько понимают логику формулировок и доказательств, сколько заучивают их. Едва сбившись с заученной формулировки, с заученного хода рассуждений, такой ученик теряется; он следует, собственно, не смыслу формулировки, не рассуждению, а их внешней словесной оболочке.

Одно из первых средств преодоления опасности: уменьшить число формулировок и особенно доказательств, которые ученик должен запомнить. Лучше, чтобы ученик знал доказательства немногих теорем, но знал с действительным пониманием, чем старался вызубрить доказательства десятков утверждений, которые содержатся в курсе геометрии за один класс.

Если мы хотим учить логическому мышлению, то и надо учить ему, а не запоминанию готовых рассуждений. Поэтому излагаемые формулировки и доказательства должны рас-

[5] *Ленин В. И.* Полн. собр. соч. — Т. 29. — С. 152—153.

сматриваться скорее как упражнения в логическом мышлении, чем как то, что надо заучивать.

Отсюда вытекает и следующий вывод: нужно давать возможно больше упражнений в логическом мышлении, как вообще нужно много упражняться, чтобы научиться какому-либо виду деятельности, будь то работа напильником, ходьба на лыжах или логические рассуждения. Поэтому полезно, во-первых, чтобы учащиеся разбирали (с пониманием) много доказательств, но не заучивали их. Во-вторых, следует решать возможно больше задач на доказательство: гораздо полезнее и приятнее сообразить, найти самому хотя бы маленький вывод, чем заучивать чужие рассуждения (кроме тех, которые особенно поучительны, остроумны и красивы).

Логика геометрии заключена не только в отдельных формулировках и доказательствах, но во всей их системе в целом. Смысл каждого определения, каждой теоремы, каждого доказательства определяется в конечном счете только этой системой, которая и делает геометрию целостной теорией, а не собранием отдельных определений и утверждений. Это заключенное в геометрии понятие о точной науке с ее строго разворачивающейся системой выводов так же существенно, как и точность в каждом выводе.

Геометрия так и должна быть преподана — с возможно большей строгостью всей системы. При этом надо понимать, что абсолютной строгости вообще не существует, и поэтому задача преподавания состоит в том, чтобы, приняв некоторый уровень строгости и определенную систему предпосылок, разворачивать на ее основе последующее изложение. Все существенное в курсе следует доказывать на принятом уровне строгости и не допускать логических перерывов, по крайней мере в основных линиях курса.

Именно так — в полной логической связности — построено изложение в «Началах» Евклида. Так же, в общем, оно построено и в знаменитом учебнике Киселева. Он удачно популяризировал Евклида, и его завидный успех обусловлен в значительной мере именно тем, что на нем лежал отсвет гения Евклида, подобно тому как на переложениях для детей «Гулливера» и «Робинзона Крузо» остается след руки их великих создателей.

Требование изложить основные линии курса без логических пропусков вовсе не означает, что ученики должны учить все эти доказательства: такая нагрузка была бы чрезмерной.

Доказательства могут быть разделены на три части: те, которые следует изучить и знать, те, которые надо понять, и, наконец, те, которые можно в ходе обучения пропустить, имея в виду, что они могут быть предъявлены и разобраны по желанию всем классом или отдельными учениками в зависимости от их уровня (они должны быть изложены в учебнике в качестве дополнений).

В изложении геометрии можно исходить из разных основных посылок, из разных систем аксиом, лишь бы в них не было ни противоречий, ни пропусков. Иначе говоря, принятая аксиоматика должна быть непротиворечивой и полной, в остальном ее выбор должен определяться педагогическими соображениями, прежде всего наглядностью и простотой вывода из них основных следствий, за которыми пойдет развертывание собственного содержания курса. Безусловное значение имеет сама стереометрия как система положений, связанных логическими переходами, а система аксиом играет роль отправного пункта, от которого начинается прохождение этой системы.

В последнее время представилось необходимым перейти в школьной геометрии на более глубокий уровень строгости, чем тот, который был у Евклида. Эта бóльшая строгость состоит прежде всего в явном указании и формулировке основных понятий и аксиом, которые в прежних изложениях только подразумевались.

Но, излагая более точно исходные посылки, формулируя принятые аксиомы, необходимо дальше держаться заложенного в них уровня строгости, не оставляя ни одного существенного пункта без доказательства, соответствующего принятому уровню. Иначе в курсе будет нарушена система, будет смазана логика его изложения и может оказаться, что в нем будет представлена не целостная наука геометрия, а ее фрагменты, чтобы не сказать куски и обрывки, один — на одном уровне логики, другой — на другом, а то и вовсе без логики.

Если принят теоретико-множественный уровень, то нужно его держаться. Например, сформулировав аксиому «Прямая есть непустое множество точек», нельзя после этого принять без доказательства, что на каждой прямой есть по крайней мере две точки (как это сделано в пособии по геометрии для 10—11 классов). Иначе уточнение исходных посылок остается без должного употребления и поэтому лишается смысла. Выходит, сначала произносятся «ученые слова», а потом действуют «по очевидности». Такое преподавание учит тому, что слова могут расходиться с делом.

Нельзя также оставлять без доказательства существенные теоремы курса, говоря «примем без доказательства...». Так почти все в курсе оказывается принятым без доказательства или основанным на принятом без доказательства, и курс приобретает сходство с набором сведений по геометрии, тогда как он, по крайней мере стереометрия, должен дать ученикам не просто сведения по геометрии, а систему в точности деталей и всей структуры. Скрытая здесь глубокая задача курса геометрии состоит в усвоении научного мировоззрения, в формировании его основы. Ее образуют безусловное уважение к установленной истине, требование доказывать то, что выдвигается в качестве истины, отказ от подмены доказательства верой или ссылкой на авторитет. Стремление к истине, поиск доказательства (или опровержения) — это активная, а потому и ведущая сторона в основе научного мировоззрения. Свойственное ему убеждение в фундаментальном значении и могуществе научной истины ярко выражено в знаменитых словах В. И. Ленина: «Учение Маркса всесильно, потому что оно верно»[6]. Курс геометрии воспитывает требование доказывать то, что утверждается, если, конечно, это не заменяется в курсе псевдодоказательствами или заявлениями: «Примем без доказательства...» Без доказательства можно принять многое, и основанием будет служить ссылка на авторитет: верно потому, что сказано в учебнике (или учителем), а не потому, что доказано.

В уважении к истине, в требовании доказательства заключается чрезвычайно важный нравственный момент. В простейшей, но очень важной форме он состоит в том, чтобы не судить без доказательств, не поддаваться впечатлениям, настроениям и наветам там, где нужно разобраться в фактах. Научная преданность истине и состоит в стремлении основывать свои убеждения в любом вопросе на наблюдениях и выводах настолько объективных, настолько не поддающихся посторонним влияниям и порывам темперамента, насколько это только доступно человеку. Впрочем, у нас нет здесь места развить эту саму по себе чрезвычайно важную тему нравственного содержания в основе научного мировоззрения. Мы только обращаем внимание на то, что курс геометрии в правильной его постановке и ориентации, воспитывая должное отношение к истине, тем самым вносит свой вклад в формирование научного мировоззрения и вместе с этим в нравственное воспитание учащихся.

Конечно, если преподавание полностью замыкается в самой геометрии, то даваемое им развитие логического мышления и элементов научного мировоззрения не выйдет за ее специальные рамки. Поэтому педагог должен привлечь внимание учащихся к общему значению требований доказательности и точности в установлении истины вообще — не в одной лишь геометрии. Но, чтобы к тому была возможность, курс не должен быть перегружен специальным материалом. Тогда учащиеся смогут усвоить то, что действительно необходимо, и в меру сил продумать общие выводы.

Мировоззрение не выучивают, оно формируется человеком на основе его жизненного опыта, культуры и учения.

---

[6] Там же. — Т. 23. — С. 43.

4. Знания и умения

Рассмотрев глубинные задачи преподавания геометрии, обратимся теперь к его явному содержанию — к тем знаниям и умениям, которые оно должно давать и вырабатывать у учащихся.

Можно сразу заметить, что выработка умения решать геометрические задачи и проводить доказательства уже заключена в сочетании геометрического воображения с логическим мышлением. Оно состоит в умении наглядно представить себе задачу, увидеть пути решения и логично провести его. Если же задача касается реальных вещей, то первое, что нужно уметь, — это представить ее как задачу математическую, как задачу геометрии (если это не сделано явно в ее постановке) и затем решать ее, опираясь на наглядное представление и логику. Геометрический метод и есть не что иное, как живое воображение, в котором находят указания для логически проводимого решения.

Вместе с чисто геометрическим методом применяются элементарная и векторная алгебра, тригонометрические функции и анализ. В школьной геометрии приложения алгебры, не считая отдельных задач, связаны с методом координат. Однако метод координат в пространстве как отдельную тему необходимо исключить из школьного курса: его включение создало без особой к тому надобности крайнюю перегрузку и уводит от основного содержания курса. Тема эта принадлежит аналитической геометрии пространства и должна быть оставлена для вузовского курса; в школе на ее настоящую проработку просто нет времени. Полезно дать только наглядное понятие о координатах в пространстве, наглядное, а не формальное, основанное на векторной алгебре, какое дано в действующем курсе. Некоторые же применения координат можно включить в задачи — не больше.

Не следует также загружать учащихся искусственно усложненными задачами. Это касается не только геометрии. Задачи, предлагаемые, скажем, на выпускных экзаменах, бывают часто совершенно надуманными и содержат такие выкрутасы, какие не встречаются ни в практике, ни в самой изысканной науке. Истина, подобно подлинной красоте, проста, как стихи «Тиха украинская ночь...». Выверты придумывают, когда не умеют найти подлинное. Проще задать хитросплетенную задачу, чем вскрыть у ученика степень ясности и точности его наглядного представления и понимания (то же относится к задачам на вступительных экзаменах в вуз). Сила и острота сообразительности упражняется и обнаруживается на решении естественных по постановке, трудных и глубоких задач.

Векторная алгебра, включая скалярное произведение, нужна в физике и уже потому не должна быть исключена из курса геометрии. К тому же она имеет простое наглядное основание (как исчисление «направленных отрезков») и богатые приложения в самой геометрии. Нужно лишь позаботиться о том, чтобы строить ее действительно на возможно более простых наглядных основаниях и в тесной связи с задачами физики. А то получается такое нелепое положение, когда физики рассказывают о векторах для своих нужд по-своему, а математики — по-своему.

Тригонометрические функции — это испытанный аппарат геометрии, и их тоже нужно излагать, отправляясь от простых наглядных задач, как они практически и возникли — из решения треугольников.

Применение анализа в вычислении объемов может быть отнесено к самому анализу в качестве его приложения, как это сделано для площадей криволинейных трапеций и др. Собственно геометрии принадлежат *понятия* площади, объема, площади поверхности и геометрические приемы, связанные с нахождением этих величин для простейших фигур.

В результате данного краткого обзора можно видеть, что в подавляющей своей части те знания и умения, какие должен приобрести учащийся в курсе геометрии, охватываются сочетанием наглядного представления с логикой, о котором мы говорили выше.

Следует откровенно признать, что значительная часть знаний, требуемых от школьника, выучивается и забывается, так как нужна не столько сама по себе в будущем для практической надобности или общего развития, сколько для «успеваемости». Формальные знания в самом деле могут быть забыты. Важнее сохранить в памяти наглядные представления, общие понятия и методы, чем загружать память деталями, которые при надобности выводятся из общих сведений или находятся в учебниках и справочниках. Можно забыть, например, формулу объема шара, как и другие формулы, которые имеются в справочниках.

Следует исключить из программы как особую тему изучение многогранных и специально трехгранных углов, оставив ее только в качестве материала для задач. Тема эта стоит в курсе особняком, и в ней нет надобности.

Зато полезно ввести некоторые наглядные вещи, касающиеся выпуклых тел, многогранников, перемещений, симметрии, ввести затем, чтобы дать дополнительную пищу развитию воображения и расширению кругозора. Рассмотрение симметрии (фактически групп симметрии) правильных многогранников — прекрасное упражнение для развития наглядных представлений (вместе с тем понятие симметрии играет фундаментальную роль в новейших теориях физики).

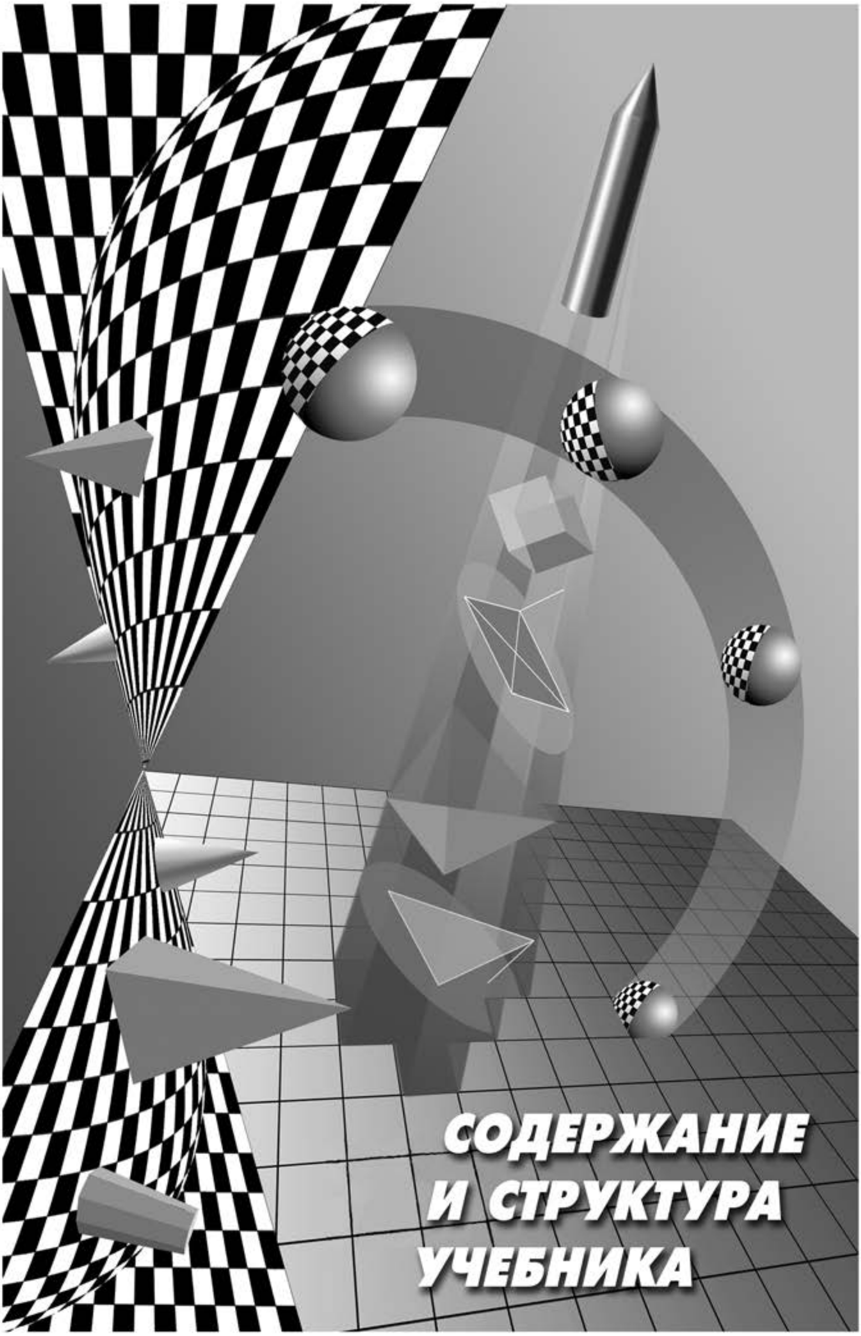
Понятия, идущие из наглядной геометрии, вообще имеют в современной науке чрезвычайно большое значение, так что не надо думать, будто наглядное — это низшая, а не высшая математика.

Материал курса геометрии, как уже было сказано о доказательствах теорем, полезно разбить на три части: обязательный минимум, который надо знать, потом то, с чем ученики должны быть ознакомлены, и, наконец, дополнения, с которыми учащиеся могут быть ознакомлены. Курс должен заключать в себе возможность выбора в зависимости от тех или иных конкретных условий, таких, например, как уровень класса, склонности учителя и др.

Привести курс геометрии в достаточное соответствие со всеми изложенными в этой статье принципами представляется нелегким, тем более что существующий курс слишком нарушил эти принципы. Но всякая перестройка образования, как бы ни была она радикальна, не должна совершаться в порядке переворота. Переворот, лет десять назад совершенный в преподавании геометрии, немало навредил ей. Нужны не перевороты, а усовершенствования, совершаемые настоятельно, но постепенно (не считая хирургических операций отсечения тех отделов курса, которые признаны ненужными). Конкретно преломить и осуществить глубокие задачи курса с его мировоззренческим значением в гармонии наглядного и логического, добиваясь при этом максимально возможной простоты и ясности, — все это достаточно трудно.

В заключение отметим, что изложенные принципы могут быть полностью отнесены к курсу геометрии в ПТУ. В нем должна господствовать та же линия на развитие пространственных представлений и логического мышления в связи с реальными вещами. Разница может быть лишь в том, что наглядный материал больше увязывается с производством и техникой, а некоторый менее нужный материал и некоторые логические тонкости могут быть опущены.

А. Д. Александров


СОДЕРЖАНИЕ
И СТРУКТУРА
УЧЕБНИКА

Методические рекомендации по теоретической части курса

Вариативность курса геометрии и его основные линии

Вариативность содержания школьных курсов в старших классах средней школы и наличие в одной школе классов с базовым и с углубленным курсом математики ставит перед учителем, преподающим одновременно в этих классах, задачу найти для каждого такого класса соответствующий ему уровень изучения геометрии. Учебно-методические комплекты по геометрии, созданные авторским коллективом А. Д. Александрова, дают возможность учителю успешно справиться с этой задачей. Один из них содержит лаконичный учебник [1], дидактические материалы [2] и книгу для учителя [3]. Данное издание этого учебника доработано в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом среднего общего образования также для углубленного курса геометрии. Поэтому по нему можно изучать как базовый, так и углубленный курс геометрии (по 1,5 или по 2 часа в неделю).

Педагогические идеи крупнейшего геометра XX века А. Д. Александрова сейчас востребованы самой педагогической реальностью. Им были посвящены его статьи в журнале «Математика в школе». Программной (и важнейшей из них) является статья, помещенная в начале этого пособия.

О том, что в школьном курсе геометрии ведущими являются три линии — линия построений, линия вычислений и линия идей и методов современной геометрии, — уже говорилось. Обсудим теперь подробнее каждую из них.

ВАЖНЕЙШИЕ ФИГУРЫ СТЕРЕОМЕТРИИ И ИХ ПОСТРОЕНИЕ

Построение фигур с теми или иными заданными свойствами — первая и важнейшая задача геометрии. Уже в первых трех постулатах «Начал» Евклида говорится о построении отрезков и окружностей, а затем, начиная с Предложения 1 о построении равностороннего треугольника с заданной стороной, Евклид строит разнообразные фигуры и завершает свои «Начала» построением правильных многогранников. В теории речь идет о построении идеальных фигур. В практике же все современное производство (промышленность, строительство и т. д.) состоит в построении реальных фигур с заданными свойствами.

Проследим линию *геометрии построений* в учебнике «Геометрия. 10—11 классы».

1. Аксиомы и первые теоремы. Основной предмет школьного курса геометрии — важнейшие геометрические фигуры.

Их надо построить, начиная с самых простых, а затем постепенно переходя к более сложным. Уже в аксиоматике стереометрии и в самых первых теоремах говорится о возможности *построить* ту или иную фигуру: *через три данные точки проходит плоскость, через две данные точки проходит прямая, через две пересекающиеся прямые проходит плоскость* и т. п. Слово *проходит* в этих утверждениях можно заменить словами *можно провести*, подчеркивая их конструктивный характер.

Построения фигур в элементарной геометрии — это теоремы существования таких фигур, доказываемые конструктивно. Это означает, что искомое построение (доказательство существования некоторой фигуры) сводится к конечному числу последовательно осуществляемых шагов, каждый из которых есть одно из нескольких заранее заданных простейших построений. Эти простейшие построения — *постулаты построения* — являются, конечно, тоже некоторыми утверждениями существования: аксиомами, их первыми следствиями, а также утверждениями, имеющими общематематический характер.

Выполняя построения в пространстве, мы опираемся на такие постулаты:

1. *Если задана фигура, то о каждой точке пространства можно сказать, принадлежит ли она этой фигуре или не принадлежит. Другими словами, можно выбирать в пространстве точки, как принадлежащие данной фигуре, так и не принадлежащие ей.*

2. *Если построены две фигуры, то считается построенным их пересечение* (например, прямая как пересечение двух плоскостей).

3. *Если даны две точки, то через них можно провести прямую.*

4. *Если даны три точки, то через них можно провести плоскость. И точно так же можно провести плоскость через прямую и точку и через две пересекающиеся или параллельные прямые.*

5. *На каждой плоскости можно проводить любые построения планиметрии.*

Во Введении учебника нарисованы важнейшие многогранники — пирамиды и призмы — и даны их описательные (дескриптивные) определения. Но существуют ли такие фигуры? Чтобы ответить на этот вопрос, докажем существование этих фигур, построив их. Это и сделано в пункте 5.5 учебника. Например, строя пирамиду с данным основанием и данной вершиной, проводим сначала ее боковые ребра, затем строим боковые грани, которые вместе с основанием и ограничат в пространстве пирамиду.

Можно не давать дескриптивного определения некоторой фигуры, а сразу построить ее. Например, назвать пирамидой фигуру, которая строится по некоторому правилу (алгоритму), а затем доказать те ее свойства, которые указываются в дескриптивном определении. Именно такой подход будет нами осуществлен позднее при изучении конусов и цилиндров в § 18 и в § 19.

Планиметрические построения в учебнике ведутся, начиная с первых глав, при построении сечений многогранников. Эти построения опираются на свойства параллельного проектирования, рассмотренного в § 4.

2. Построение взаимно перпендикулярных и взаимно параллельных прямых и плоскостей. Серию именно этих теорем о перпендикулярности и параллельности А. Д. Александров назвал «строительной геометрией». Из различных отношений перпендикулярности и параллельности важнейшим в стереометрии является отношение перпендикулярности прямой и плоскости: к нему сводятся многие другие стереометрические построения (например, ортогональное проектирование). Изучением перпендикулярности прямой и плоскости начинается глава II в учебнике (§ 6).

Основной признак перпендикулярности прямой и плоскости (§ 7, теорема 6) позволяет просто решить задачу о построении плоскости, проходящей через данную точку и перпендикулярную данной прямой. Единственность такой плоскости также легко устанавливается. Решенная задача приводит к одной из двух основных теорем о перпендикулярности прямой и плоскости: *через каждую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная данной прямой, и притом только одна* (пункт 9.2, теорема 11).

Из этой теоремы следует, в частности, что *две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны* (пункт 11.1).

Построить прямую, проходящую через данную точку A и перпендикулярную данной плоскости α сложнее. Возможны два случая.

1) Если точка A лежит в плоскости α, то проводим через нее в этой плоскости любую прямую b, затем строим плоскость β, проходящую через точку A и перпендикулярную прямой b. Затем в плоскости β проводим через A прямую a, перпендикулярную прямой c, по которой пересекаются α и β. Прямая $a \perp \alpha$, так как $a \perp b$ и $a \perp c$ (пункт 7.3). Как видно, для решения задачи о проведении перпендикуляра к плоскости из точки этой плоскости достаточно основного признака перпендикулярности прямой и плоскости.

2) Если точка A не лежит в плоскости α, то предварительно доказываем еще один признак перпендикулярности прямой и плоскости: *если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости* (пункт 8.2, теорема 9).

Этот признак используем так: берем в плоскости α любую точку B и через нее проводим прямую b, перпендикулярную плоскости α, а затем через точку A проводим прямую a, параллельную прямой b. Тогда $a \perp \alpha$ (пункт 9.1). Теперь мы умеем из каждой точки вне данной плоскости опустить перпендикуляр на эту плоскость.

Построение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной данной плоскости, доказывает вторую основную теорему о перпендикулярности прямой и плоскости: *через каждую точку проходит прямая, перпендикулярная данной плоскости, и притом только одна* (пункт 9.1, теорема 10).

Ученики должны хорошо представлять себе «расслоенность» пространства на семейство плоскостей, перпендикулярных данной прямой, и на семейство прямых, перпендикулярных данной плоскости.

Из теорем о перпендикулярности прямой и плоскости выделим еще теорему о том, что *две прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны* (пункт 8.1, теорема 8).

Теоремы о перпендикулярности прямой и плоскости позволяют легко решить задачу о построении плоскости, проходящей через данную точку A и параллельную данной плоскости α: из точки A опускаем перпендикуляр AB на плоскость α, а затем через A проводим плоскость β, перпендикулярную прямой AB. Ясно, что плоскость β параллельна плоскости α (пункт 11.3).

Теоремы о перпендикулярности прямой и плоскости дают возможность так определить сонаправленность лучей, что доказательство транзитивности их сонаправленности становится совсем простым. Данное А. Д. Александровым определение сонаправленности двух лучей таково: два луча сонаправлены, если они принадлежат прямым, перпендикулярным одной плоскости, и лежат по одну сторону от этой плоскости (пункт 15.1). Проследите, как теоремы о перпендикулярности прямой и плоскости участвуют в доказательстве транзитивности сонаправленности лучей. Обдумайте также, каковы планиметрические аналоги такого подхода к сонаправленности лучей.

О роли отношения перпендикулярности прямой и плоскости в изучении ортогонального проектирования уже было сказано. Отдельный пункт 6.3 посвящен роли перпендикуляра в практике, в реальности.

3. Цилиндры и конусы. Призмы и пирамиды. Построение в первой главе пирамид и призм подсказывает, как конструктивно можно определить цилиндры и конусы с произвольным основанием, взяв в качестве их основания любую плоскую фигуру F. Так мы и поступаем в учебнике.

Чтобы построить конус с основанием F и с вершиной в некоторой точке P (не лежащей в плоскости фигуры F), надо точку P соединить отрезками со всеми точками фигуры F. Эти отрезки и заполнят конус с вершиной P и основанием F (рис. 161, *а*, пункт 19.1).

А определяются так. Берутся две параллельные плоскости α и α' и произвольная фигура F в плоскости α. Из всех точек фигуры F проводятся параллельные друг другу отрезки до плоскости α'. Фигура, которую заполнят эти отрезки, и называется цилиндром (пункт 18.1, рис. 153, *б*).

Теперь призму (пирамиду) можно определить как цилиндр (конус), основанием которого является многоугольник. Важно отметить, что при таком подходе не требуется сложное понятие многогранника, о котором мы говорим в следующем пункте.

Из общих свойств цилиндров и конусов доказываются лишь простые свойства об их сечениях плоскостями, параллельными их основаниям.

Выделяются прямые цилиндры как цилиндры, образующие которых перпендикулярны плоскости их основания. Прямые цилиндры затем сыграют важную роль в теории объемов.

Традиционный цилиндр вращения — это прямой цилиндр, основание которого — круг (пункт 18.3).

А традиционный конус вращения — это конус, основание которого круг и вершина которого проектируется в центр основания (пункт 19.2).

Правильная призма — это прямая призма, основание которой правильный многоугольник. Как она строится — ясно.

Правильная пирамида — это пирамида, основание которой правильный многоугольник и боковые ребра которой равны. Как она строится (и рисуется!) тоже рассказывается в учебнике.

Общая точка зрения на цилиндры и конусы и конструктивный подход к их определению делают соответствующий им раздел в школьном курсе стереометрии простым и наглядным.

4. Многогранники и многогранные поверхности. В своей обширной статье «Что такое многогранник?» (МШ, 1981, № 1 и № 2) А. Д. Александров писал:

«Многогранники составляют, можно сказать, центральный предмет стереометрии...

Центральная роль многогранников определяется прежде всего тем, что многие результаты, относящиеся к другим телам, получаются исходя из соответствующих результатов для многогранников; достаточно вспомнить определения объемов тел и площадей поверхностей путем предельного перехода от многогранников...

Независимо от этого многогранники сами по себе представляют чрезвычайно содержательный предмет исследования, выделяясь среди всех тел многими интересными свойствами, специально к ним относящимися теоремами и задачами. Достаточно вспомнить теорему Эйлера о числе граней, ребер и вершин, симметрию правильных многогранников, вопрос о заполнении пространства многогранниками и др.».

Чаще всего определяют многогранник как тело, граница которого состоит из конечного числа многоугольников. Такое дескриптивное определение предполагает, что до этого определены понятия *тело* и *граница тела*. Определение этих понятий требует введение понятий граничная и внутренняя точка фигуры. Никаких трудностей в определении этих понятий нет: граничная точка фигуры в пространстве это такая точка, что любой шар с центром в этой точке содержит как точки рассматриваемой фигуры, так и точки, ей не принадлежащие. А точка фигуры, которая не является ее граничной точкой, называется внутренней точкой фигуры.

Множество граничных точек фигуры называется ее границей, а множество внутренних точек фигуры называется ее внутренностью.

Согласно А. Д. Александрову телом называется ограниченная (т. е. лежащая в некотором шаре) фигура в пространстве, которая, во-первых, имеет внутренние точки, причем любые две из них можно соединить ломаной внутри фигуры, и, во-вторых, граница которой принадлежит фигуре и совпадает с границей ее внутренности. Граница тела называется его поверхностью.

Эти определения легко сообщить и проиллюстрировать наглядными примерами в любом классе, но в базовом курсе, можно, например, ограничиться словами, которыми начинается учебник А. П. Киселева:

«Часть пространства, ограниченная со всех сторон, называется геометрическим телом. Геометрическое тело отделяется от окружающего пространства поверхностью».

Итак, дескриптивное определение многогранника обладает наглядностью, но чтобы дать его «аккуратно», приходится сделать довольно много шагов. Проще конструктивно определить многогранник как фигуру, составленную из тетраэдров (треугольных пирамид). Тетраэдры, которые составляют многогранник, либо имеют только общую грань, либо имеют только общее ребро, либо имеют только общую вершину, либо не имеют общих точек. Два таких подхода к определению многогранника даны в учебнике для школ с углубленным изучением математики. Там же доказана их равносильность. В данном учебнике мы ограничиваемся лишь определением многогранника как тела, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников.

Вопрос о том, что такое грань многогранника, тоже оказывается совсем не простым. Если обратиться к учебнику стереометрии А. П. Киселева, то там можно прочесть:

«Многогранником называется тело, ограниченное плоскими многоугольниками. Общие стороны смежных многоугольников называются ребрами многогранника. Многоугольники, которые ограничивают многогранник, называются его гранями».

Ясно, что в этих фразах многое недосказано, а лишь подразумевается. Например, если в каждой грани куба провести диагональ, то получим (согласно сказанному у А. П. Киселева), что у куба двенадцать треугольных граней и у него 18 ребер. Недосказано у А. П. Киселева, что многоугольник на поверхности многогранника лишь тогда является гранью многогранника, если он не содержится ни в каком другом многоугольнике, лежащем на поверхности того же многогранника.

Но и этого требования «максимальности» для грани тоже недостаточно. Определяя грань многогранника в учебнике, мы помимо условия «максимальности» предъявляем к многоугольнику, называющемуся гранью, еще такое требование: внутренность многогранника прилегает лишь с одной стороны к этому многоугольнику. Как показывает пример многогранника на рис. 200, *в*, многоугольники, не удовлетворяющие этому условию, могут лежать на поверхности многогранника, но гранями мы их не называем.

Пример многогранника на рис. 200, *в* подтверждает, что, говоря о гранях многогранника, следует под многоугольником понимать не только односвязные многоугольники, ограниченные простой замкнутой ломаной (простые многоугольники), но многосвязные многоугольники.

Завершая обсуждение понятий *многогранник* и *его элементы*, процитируем еще раз статью А. Д. Александрова «Что такое многогранник?».

«Рассмотренный, казалось бы, простой вопрос о гранях многогранника очень поучителен как пример, показывающий, насколько необходимо внимательное сочетание наглядного представления и строгой логики. Представляя себе многогранник как тело, ограниченное многоугольниками, нужно вдуматься как в это представление, так и в принятое определение многоугольника. Нередко говорят просто: «Многоугольники, ограничивающие многогранник, называются гранями». Но это, как мы видели, неверно: никто не считает гранями куба любые многоугольники, на которые можно разделить его обычно понимаемые грани, хотя в совокупности такие многоугольники его и ограничивают.

Причина ошибки в том, что представляют себе ограничивающие многогранник многоугольники как грани, т. е.

наибольшие, но упускают из виду, что это представление нужно явно оговорить в определении.

Более того, определив многоугольник как простой многоугольник, упускают из виду многогранники, у которых есть не простые грани. Происходит это оттого, что либо ограничивают наглядное представление и рассматриваемые примеры только простейшими многогранниками, либо, представляя и более сложные примеры, не обращают должного внимания на то, что для них принятые определения могут не годиться.

Расширяйте наглядные представления; сверяйте с ними даваемые определения и обратно — представления с определениями».

Обратите внимание, что в статье в определении грани нет условия о том, что внутренность многогранника прилегает к ней с одной стороны. Примеры, подобные многограннику, изображенному на рис. 200 в учебнике, появились позднее, уже после того, как статья была написана, в процессе дальнейшей нашей работы над учебниками для школы. Это говорит и о том, насколько сложен предмет даже той геометрии, которую называют *элементарной*, и о том, что в процессе работы над учебниками для школы геометрам приходится решать и чисто научные проблемы.

Под словом *многогранник* в современной математике часто имеют в виду не тело, ограниченное многоугольниками, а фигуру в пространстве, составленную из многоугольников (например, пять граней куба). В школьной геометрии такие фигуры удобнее называть *многогранными поверхностями*. Многогранными поверхностями являются поверхности телесных многогранников. Многогранными поверхностями можно считать и многогранные углы, составленные из плоских углов аналогично тому, как простые замкнутые ломаные составлены из отрезков.

Говоря о развертках многогранников, имеют в виду именно наборы многоугольников, из которых «склеиваются» многогранные поверхности. Вся эта тематика имеет явно конструктивный характер как в теории, так и в практике — школьникам (да и студентам) очень нравится клеить модели красивых многогранников — правильных, полуправильных, звездчатых. Геометрия построений в учебнике завершается построением именно правильных многогранников (как и в «Началах» Евклида).

ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

После того как фигуры построены, встает задача об их *измерении*, о *вычислении* характеризующих эти фигуры геометрических величин. Именно вычислительные задачи по геометрии даются на разнообразных экзаменах (как выпускных, так и вступительных), а потому именно таким задачам учителя обычно уделяют в курсе геометрии наибольшее внимание. Завершающим этапом в решении вычислительной задачи является вычисление по некоторой полученной в процессе ее решения алгебраической формуле, т. е. чисто арифметические операции. Если «задача» состоит лишь в применении известной уже формулы, когда заданы входящие в нее величины, то это всего лишь упражнение в арифметике, помогающее запомнить применяемую формулу. В содержательной геометрической задаче этому завершающему этапу предшествует вывод алгебраической формулы, обычно связанный с дополнительными построениями. В теоретическом тексте учебника выводится сравнительно немного вычислительных формул — мы не перегружаем память учеников частностями, а учим их получать из этих важнейших формул нужные для решения конкретной вычислительной геометрической задачи алгебраические выражения. Обсудим линию *геометрии вычислений* в учебнике.

1. Важнейшие вычислительные формулы планиметрии. В планиметрии вычисляют длины, площади и углы. Двумя первыми вычислительными формулами планиметрии являются формулы для площади прямоугольника (известная из начальной школы):

$$S = ab, \tag{1}$$

и формула для суммы углов треугольника:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ. \tag{2}$$

Основная формула для вычисления расстояний — это *теорема Пифагора*:

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{3}$$

Острые углы прямоугольного треугольника находят (если известны две его стороны) по формулам:

$$\sin A = \frac{a}{c} \text{ и } \cos A = \frac{b}{c}. \tag{4}$$

Обобщение теоремы Пифагора — *теорема косинусов*:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C. \tag{5}$$

Эта теорема позволяет находить как сторону треугольника (если известен противолежащий ей угол и две другие стороны треугольника), так и угол треугольника (если известны три стороны треугольника).

Третья важнейшая теорема планиметрии — *теорема синусов*:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \tag{6}$$

Отношения в равенствах (6) — это диаметры окружности, описанной вокруг треугольника.

Площадь треугольника считают по формулам:

$$S = \frac{1}{2} a h_a \tag{7}$$

или

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C. \tag{8}$$

Вспоминаем также формулы для длины окружности и площади круга.

Этих формул вполне достаточно, чтобы решить любую вычислительную планиметрическую задачу. Конечно, полезно знать формулу Герона, выражающую площадь треугольника через его стороны. Но, может быть, полезнее, применяя теорему Пифагора, найти высоту треугольника, а затем воспользоваться формулой (7)? Сделав это, мы выведем формулу Герона.

Еще два примера. Надо ли ученикам запоминать формулы для радиусов вписанных и описанных окружностей треугольника? Для любого многоугольника, имеющего вписанную окружность радиуса r, его площадь S выражается по формуле $S = pr$, где p — полупериметр многоугольника. Это формула получается сразу, если соединить центр вписанной окружности с вершинами многоугольника и подсчитать площади получившихся треугольников с высотами r по формуле (7).

А чтобы выразить радиус R окружности, описанной вокруг треугольника, достаточно вспомнить, что отношения в теореме синусов — это диаметры описанной окружности, т. е. $2R = \frac{c}{\sin C}$, выразить отсюда $\sin C$ и подставить его в (8). Выразив R из полученной формулы, имеем: $R = \frac{abc}{4S}$.

2. Расстояния. Расстояние — важнейшая из геометрических величин: через нее выражаются все остальные геометрические величины. В учебнике понятие *расстояние* последовательно расширяется от расстояния между точками до расстояния между фигурами. Рассмотрим это.

а) *Расстояния между точками (длина отрезка).* К тем планиметрическим формулам, о которых уже говорилось (важнейшая из них — теорема Пифагора), в стереометрии добавляется пространственный аналог теоремы Пифагора, которому даны различные формулировки:

1) *квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений*;

2) *расстояние между двумя точками, координаты которых известны, равно корню квадратному из суммы квадратов разностей их одноименных координат*;

3) *модуль вектора равен корню квадратному из суммы квадратов его прямоугольных координат.*

О расстоянии от фиксированной точки — центра — говорится при определении важнейших фигур элементарной геометрии — окружности и круга, сферы и шара.

б) *Расстояние от точки до фигуры.* Расстоянием от точки A до фигуры F называется расстояние между точкой A и ближайшей к ней точкой фигуры F. При этом точка B фигуры F называется **ближайшей** к точке A, если отрезок AB не длиннее отрезка, соединяющего точку A с любой другой точкой фигуры F, т. е. отрезок AB является **кратчайшим** из отрезков, соединяющих точку A с точками фигуры F. Например, длина перпендикуляра AB, опущенного из точки A на прямую p (плоскость α), не проходящую через точку A, является расстоянием от A до прямой p (плоскости α), а основание перпендикуляра — точка B — ближайшая к точке A точка прямой p (плоскости α).

Иллюстрируя это понятие примерами из практики, можно вспомнить и о футболе (одиннадцатиметровый удар или «стенка» игроков, отодвинутая судьей на 9 метров), и о расстоянии корабля или пловца до берега, и о высоте над Землей летящего спутника и т. п.

Заметим, что когда говорят о высоте пирамиды (величине, а не об отрезке), то имеют в виду расстояние от вершины пирамиды до плоскости ее основания.

Используя понятия ближайшей точки и кратчайшего отрезка, совсем просто можно доказать классическую теорему о трех перпендикулярах: *наклонная к плоскости перпендикулярна прямой, лежащей в этой плоскости, тогда и только тогда, когда проекция наклонной перпендикулярна этой прямой.*

Доказательство. Пусть даны наклонная AC к плоскости α, ее проекция PC на эту плоскость и прямая a, лежащая в плоскости α и проходящая через точку C (рис. 112, пункт 13.2). В теореме два взаимно обратных утверждения: 1) если $AC \perp a$, то $PC \perp a$; 2) если $PC \perp a$, то $AC \perp a$. Докажем их.

Возьмем переменную точку X прямой a и рассмотрим треугольник AXP (рис. 112, *б*). Он прямоугольный, поскольку $AP \perp \alpha$. По теореме Пифагора $AX^2 = XP^2 + AP^2$. Две величины AX^2 и XP^2 отличаются на постоянное слагаемое AP^2. Поэтому отрезок AX становится кратчайшим при движении точки X по прямой a тогда и только тогда, когда кратчайшим становится отрезок XP. А кратчайшими они становятся тогда и только тогда, когда они одновременно оказываются перпендикулярными прямой a. Из этого и вытекают оба утверждения теоремы о трех перпендикулярах.

Понятие ближайшей точки дает возможность получить интересное обобщение теоремы о трех перпендикулярах. Заменим в этой теореме прямую a на произвольную фигуру F

в плоскости α (рис. 114 [1], пункт 13.3). Пусть X — переменная точка фигуры F. Из равенства $AX^2 = XP^2 + AP^2$ делаем тот же вывод о наименьших расстояниях AX и PX — они становятся наименьшими одновременно. Получаем такое обобщение теоремы о трех перпендикулярах:

Теорема (*о ближайшей точке*). *Пусть фигура F лежит в плоскости α, A — некоторая точка, не принадлежащая α, и P — ее проекция на α. Точка фигуры F будет ближайшей к точке A тогда и только тогда, когда она является ближайшей к ее проекции P.*

Об этом обобщении классической теоремы о трех перпендикулярах А. Д. Александров пишет так:

«Теорема о трех перпендикулярах оказалась, как мы видим, только частным случаем теоремы о ближайшей точке, относящейся к любой плоской фигуре. При этом доказательство ее ничуть не сложнее. Это примечательно!

Один из моментов в развитии математики состоит в том, что результаты, которые прежде относились к более специальным фигурам, уравнениям, функциям или иным объектам математики, обобщаются позже на гораздо более общие объекты. Теорема о трех перпендикулярах восходит к древним грекам (но доказывали они ее по-другому), а теорема о ближайшей точке принадлежит геометрии XX века».

в) *Расстояние между фигурами.* Расстояние между двумя фигурами — это расстояние между ближайшими точками этих фигур (пункт 14.1). Удивительно, что в программе школьного курса геометрии отсутствует это простое и важное как в теории, так и в практике понятие, но перечисляются разнообразные его частные случаи, относящиеся к расстояниям между прямыми и плоскостями. Расстояниями между двумя прямыми или плоскостями во всех этих частных случаях являются длины их общих перпендикуляров. В практике говорят и измеряют именно эти расстояния. Например, когда речь идет о высоте комнаты (расстояние между параллельными плоскостями), или о ширине железнодорожной колеи (расстояние между параллельными прямыми), или о высоте планки при прыжках в высоту (расстояние между параллельными прямой и плоскостью).

Когда говорят о высоте призмы как об отрезке, имеют в виду общий перпендикуляр плоскостей оснований призмы, а когда говорят о высоте призмы как о величине, то имеют в виду расстояние между плоскостями ее оснований.

В практике измерение расстояний между фигурами часто касается параллельных фигур, но при этом параллельность этих фигур понимается не как отсутствие у них точек пересечения (при их мысленном неограниченном продолжении), а как постоянство расстояний между ними. Вот как сказано об этом в учебнике:

«Параллельные прямые и плоскости определяются как прямые и плоскости, которые не пересекаются (на всем их бесконечном продолжении). Но реально мы имеем дело с конечными частями прямых и плоскостей. Параллельность противоположных краев доски, так же как параллельность междуэтажных перекрытий, определяется не тем, что получается при их бесконечном продолжении. Никакой плотник не продолжает краев доски до бесконечности, как и строители даже мысленно не продолжают межэтажные перекрытия. На самом деле в параллельных прямых и плоскостях важны и имеют реальный смысл те их свойства, которые относятся к их конечным частям. На основании этих же свойств производится построение параллельных прямых и плоскостей, а в действительности — их конечных частей.

Важнейшим среди таких свойств, характеризующих параллельность прямых и плоскостей, является постоянство расстояния, т. е. равноудаленность точек одной прямой или плоскости от другой».

Полезно представлять, что расстояние между скрещивающимися прямыми (длина их общего перпендикуляра) — это расстояние между параллельными плоскостями, в которых лежат эти прямые, или расстояние от одной из этих прямых до параллельной ей плоскости, содержащей другую прямую.

3. Углы. В этом пункте, говоря об углах, мы везде под словом *угол* будем иметь в виду величину этого угла.

а) *Угол между лучами* (пункт 15.2). К этому понятию сводятся в дальнейшем определения разнообразных углов в стереометрии, в том числе и угла между векторами. Сначала требуется ввести отношение сонаправленности лучей и доказать его транзитивность. В этом трудном вопросе А. Д. Александров предложил единообразный подход, годящийся как в планиметрии, так и в стереометрии. Изложим его стереометрический вариант. Планиметрический рассмотрите самостоятельно.

Два луча a и b называются сонаправленными, если найдется такая плоскость, которой они перпендикулярны и лежат с одной стороны от нее (пункт 15.1). Ясно, что такие лучи либо параллельны, либо один из них содержит другой. Обозначают сонаправленность лучей a и b так: $a \uparrow\uparrow b$.

Докажем транзитивность отношения сонаправленности лучей.

Дано: $a \uparrow\uparrow b$, $b \uparrow\uparrow c$.

Доказать: $a \uparrow\uparrow c$.

Доказательство. Пусть α — плоскость, которой перпендикулярны лучи a и b и от которой они лежат с одной стороны, а β — аналогичная плоскость для лучей b и c. Если плоскости α и β совпадают, то, очевидно, $a \uparrow\uparrow c$. Пусть плоскости α и β различны. Тогда они параллельны, так как они перпендикулярны лучу b. Рассмотрим те ограниченные ими полупространства, в которых лежит луч b. Одно из них содержит другое. В этом полупространстве лежат все лучи a, b, c и все они перпендикулярны его граничной плоскости. Поэтому $a\uparrow\uparrow c$.■

О лучах, которые лежат на параллельных прямых (или на одной прямой), но которые не сонаправлены, говорят, что они *направлены* противоположно.

Определим теперь угол между лучами в пространстве. Если два луча сонаправлены, то считают, что угол между ними равен 0°. Если же лучи направлены противоположно, то угол между ними полагают равным 180°. В дальнейшем рассматриваем лучи, не лежащие на параллельных прямых (или на одной прямой). Если два луча a и b имеют общее начало, то они лежат в одной плоскости и угол между ними понимается как в планиметрии. Если же начала лучей a и b различны, то из некоторой точки O проводим сонаправленные им лучи p и q и находим угол между ними. Необходимо установить корректность этого определения — его независимость от выбора точки O.

Возьмем любую точку M и проведем из нее лучи c и k, сонаправленные соответственно с лучами a и b. Тогда $c\uparrow\uparrow p$ и $k\uparrow\uparrow q$.

На луче c отложим отрезок MC, на луче k — отрезок MK, на луче p — отрезок $OP=MC$ и на луче q — отрезок $OQ=MK$. Проведем отрезки OM, PC, QK, PQ, CK. Так как отрезки OP и MC равны и параллельны, то четырехугольник $OMCP$ — параллелограмм. Поэтому отрезки OM и PC равны и параллельны. Аналогично, четырехугольник $OMKQ$ — параллелограмм, а потому отрезки OM и QK равны и параллельны. Следовательно, отрезки PC и QK равны и параллельны. Значит, четырехугольник $PQKC$ — параллелограмм, а потому $PQ=CK$. Но тогда треугольники OPQ и MCK равны (по трем сторонам). Поэтому $\angle pq=\angle POQ=\angle CMK=\angle ck$. Корректность определения угла между лучами доказана.

б) *Углы между прямыми и плоскостями.* Углом между прямыми называется нетупой угол между лучами, лежащими на этих прямых (пункт 15.3).

Линейный угол двугранного угла определяется как угол между лучами, проведенными в гранях двугранного угла из некоторой точки его ребра и перпендикулярных этому ребру. Корректность такого определения вытекает из сонаправленности двух лучей, проведенных в одной грани двугранного угла перпендикулярно его ребру.

Если плоскости параллельны, то угол между ними полагается равным 0°. Если же две плоскости пересекаются, то углом между ними называется величина нетупого из образованных ими двугранных углов. Это понятие используется при вычислении площади S' ортогональной проекции какого-либо многоугольника с площадью S:

$$S' = S\cos\varphi, \tag{9}$$

где φ — угол между плоскостью многоугольника и плоскостью его проекции.

Наконец, *угол между прямой и плоскостью* в случае, когда они не взаимно перпендикулярны, определяется как угол между прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость (пункт 15.4). Если же плоскость и прямая взаимно перпендикулярны, то угол между ними полагается равным $90°$.

Отметим, что доказательства общих теоретических положений, связанных с углами, относятся в основном к рассмотрению углов между лучами. Об остальных же углах речь идет в многочисленных вычислительных задачах о пирамидах и призмах. Объем теории в этом разделе (как в базовом, так и в углубленном курсах) не очень велик. Но только в углубленном курсе (или в элективном курсе) можно существенно расширить его, изучив тригонометрию трехгранных углов.

4. Объем (§ 25—27). Задачи об измерении объемов нельзя в школьном курсе геометрии изложить с той же степенью строгости, на которой шло изложение начальных тем курса стереометрии. Поэтому в школьном изложении теории объемов многие ее положения аргументируются соображениями наглядности.

Объемом тела называется положительная величина, определенная для тела так, что, во-первых, равные тела имеют равные объемы (условие инвариантности) и, во-вторых, если тело составлено из конечного числа тел, то его объем равен сумме их объемов (условие аддитивности).

Сразу же обращается внимание на аналогию в определениях объема тела и площади плоской фигуры, а также длины отрезка: во всех трех случаях эти положительные величины определяются условиями инвариантности и аддитивности.

Эти описательные (дескриптивные) определения требуют доказательств соответствующих теорем существования объема, площади, а также длины. А. Д. Александров впервые в школьных учебниках геометрии сказал о том, что «мыслимые в геометрии тела могут быть настолько сложно устроены, что приписать им всем объем с указанными свойствами (положительности и аддитивности) нельзя». Он выделил такой класс тел (и аналогичный класс плоских фигур), у которых объем существует и который можно легко описать в рамках школьного курса. Это класс тел, в которых каждая прямая, имеющая с телом общие точки, пересекает его поверхность по конечному числу отрезков и отдельных точек. Такие тела (и плоские фигуры) А. Д. Александров назвал *простыми*. Измеримость простых фигур и тел А. Д. Александров доказал в своей работе «О мере, внутренности и границе» (Сибирский математический журнал. 1983, т. 24, № 5, стр. 12—14).

Основная цель темы «Объемы» — вывод формул для вычисления объемов тел, изучаемых в элементарной геометрии. Сделано это в учебнике очень просто. Сначала доказывается, что *объем любого прямого цилиндра равен произведению площади его основания и высоты*. Любое простое тело приближенно можно рассматривать расслоенным на тонкие прямые цилиндры. Это позволяет выражать объем тела интегралом от площади его сечений или (что равносильно) показать, что площадь плоского сечения тела равна производной от объема части тела, ограниченного плоскостью сечения. (Этот второй подход можно применить и в том случае, если понятие определенного интеграла отсутствует в курсе начал анализа.) Используя формулу Ньютона — Лейбница, выводим, во-первых, формулу для объема любого цилиндра (в частности, призмы), во-вторых, формулу для объема любого конуса (в частности, пирамиды) и, наконец, формулу для объема шара.

Снова отметим, что общий взгляд в учебнике на проблему объемов тел позволяет упростить изложение этой темы в школьном курсе, освободить ее от тех частностей, которыми был перегружен традиционный курс стереометрии.

5. Площади поверхностей (§ 28). В этой теме вычисляются площади трех видов поверхностей. Во-первых, это *площади многогранных поверхностей*. Такие площади — это суммы площадей их граней. Это чисто планиметрический материал и вряд ли стоит курс стереометрии перегружать какими-либо формулами о вычислении площадей боковых поверхностей призм или пирамид. Такие формулы ученики выпускного класса должны уметь (если это нужно) вывести, а не запоминать их, перегружая свою память частностями.

Во-вторых, это *площади развертывающихся поверхностей*: площади боковых поверхностей цилиндра вращения и конуса вращения. Вычисляя их, можно в базовом курсе ограничиться интуитивно-наглядным уровнем: взять развертки этих поверхностей — прямоугольник и сектор круга, вычислить их площади по известным формулам планиметрии и получить тем самым формулы для площадей боковых поверхностей. Эти формулы ученики должны запомнить. Формулы же площадей *полных поверхностей* цилиндра и конуса вряд ли стоит запоминать: зная формулы для площадей боковых поверхностей цилиндра и конуса, формулы для площадей их полных поверхностей надо уметь выводить.

При рассмотренном подходе к понятию площади развертывающейся поверхности считается, что площадь такой поверхности — это площадь ее развертки, но какая поверхность является развертывающейся и что такое ее развертка остается на уровне интуиции. Если давать точные ответы на такие вопросы, то приходится говорить об изометричных поверхностях, о внутренней геометрии поверхности, об изгибании поверхности.

Если же поверхность на плоскость развернуть нельзя (например, любую область на сфере), то приходится приближать ее многогранными поверхностями. Просто приближать такую поверхность вписанными в нее многогранниками нельзя. Для выпуклых поверхностей такое приближение ведет к нужной цели, если брать многогранники, описанные вокруг рассматриваемой выпуклой поверхности. Грани этих многогранников лежат в *опорных плоскостях* выпуклой поверхности. Понятие *опорная плоскость* легко определяется в терминах элементарной стереометрии: плоскость называется опорной плоскостью тела, если она проходит через его граничную точку и тело лежит по одну сторону от этой плоскости. Вводится это понятие после изучения взаимного расположения плоскости и шара (сферы). Оно значительно удобнее традиционного для курса элементарной стереометрии понятия *касательная плоскость*, которое, по существу, относится к дифференциальной геометрии. Об опорных плоскостях удобно говорить и для многогранников, у которых в вершинах и на ребрах нет касательных плоскостей.

Объем многогранника, описанного вокруг сферы, равен одной трети произведения площади его поверхности и радиуса сферы. Когда грани такого многогранника становятся сколь угодно малыми, то его объем стремится к объему шара, а площадь его поверхности стремится к площади сферы. Поэтому объем шара равен одной трети произведения площади сферы на ее радиус, т. е. равен $4\pi R^2$.

Площади боковых поверхностей цилиндра и конуса можно найти, приближая их призмами и пирамидами, описанными вокруг цилиндра и конуса.

Идеи и методы современной геометрии: преобразования, координаты, векторы

С точки зрения обсуждающихся в этой линии идей, идеи симметрии, преобразований, координат и векторов уже знакомы школьникам из курса математики основной школы. Но в стереометрии этот материал становится богаче и интереснее. Мы обсудим, как рассматриваются симметрии и преобразования, а также координаты и векторы в учебнике. В нем мы следуем тому же плану, по которому эти понятия изучались в наших учебниках для 9 класса.

1. Симметрия как свойство фигур. Идея *симметрии* (не только в геометрии) — важнейшая общекультурная идея. Напомним, что греческое слово *симметрия* означает согласованность размеров, *соразмерность*. Окружающий нас мир во многом симметричен: симметричны снежинки и кристаллы, цветы и листья, тела насекомых и животных и т. д. и т. п. И все созданное человеком, тоже чаще всего симметрично: архитектурные сооружения, мебель, посуда, автомобили и самолеты и т. д. Симметрию мы находим и в музыке (в мелодиях и ритмах), и в поэзии (в размерах и рифмах), и в спортивных играх.

А в геометрии, изучая тот или иной класс фигур, мы рассматриваем более подробно среди фигур этого класса наиболее симметричные: равнобедренные и равносторонние треугольники в классе треугольников, правильные пирамиды и правильные призмы среди пирамид и призм и т. п.

В учебнике разговор о симметрии конкретных фигур ведется вместе с изучением рассматриваемой фигуры, и начинается он с рассмотрения симметрии сферы и шара (§ 17). Изучая симметрию сферы и шара, мы говорим о том, какие вообще фигуры называются *центрально-симметричными* (пункт 17.1), какие — *зеркально-симметричными* (пункт 17.2), а какие — *фигурами вращения* (пункт 17.3). И далее, изучая цилиндры и конусы, призмы и пирамиды, правильные многогранники, мы тоже говорим об их симметрии.

Характер изучения вопросов, связанных с симметрией фигур, отличен от того логически строгого изложения, который был в геометрии построений: изучение этих вопросов во многом описательно, здесь на первый план выходят наглядность и живое пространственное воображение. (Заметим, что для многих учеников, которым не слишком близка логика геометрии, в этих вопросах геометрия становится интересной). Эстетическая окраска курса геометрии при изучении симметрии усилится, если его иллюстрировать примерами из тех областей, о которых уже было сказано (архитектуры, техники, живой природы и т. д.). Имеется богатая научно-популярная литература, связанная с симметрией.

Еще раз о симметрии фигуры мы позднее будем говорить как о возможности самосовмещения этой фигуры некоторым нетождественным движением. Сначала следует обсудить геометрические преобразования.

2. Геометрические преобразования в школьном курсе. Основные понятия и терминология. О преобразованиях фигур говорил еще Евклид, когда он формулировал аксиому 7: *и совмещающиеся друг с другом равны между собой*. И при доказательствах теорем, основанных на понятии *наложение*, речь идет также о преобразованиях фигур. Любое дополнительное построение, выполняющееся при доказательстве теоремы или при решении задачи, — это тоже преобразование фигуры. Преобразование пространственных фигур в плоские происходит, когда эти фигуры изображаются в рисунках или чертежах. Эти примеры можно продолжить. Так что преобразования фигур присутствуют во всех курсах геометрии, и вопрос состоит в том, применяются ли преобразования в этом курсе на наглядно-интуитивном уровне, без каких бы то ни было определений (например, *вращение вокруг прямой* в учебнике А. П. Киселева), является ли рассматриваемое преобразование лишь средством в теории и при решении задач, или некоторое преобразование или класс преобразований становятся сами предметом изучения? Разные учебники геометрии по-разному отвечают на поставленный вопрос. Так что диапазон изучения преобразований в разных учебниках геометрии весьма широк.

На наш взгляд, о геометрических преобразованиях в курсе геометрии можно говорить как о геометрических аналогах числовых функций, столь детально изучающихся в курсе алгебры и начал анализа: числовые функции сопоставляют число числу, а геометрические преобразования сопоставляют точке точку. Именно об этом и говорят определения, данные в учебнике:

Преобразование фигуры F состоит в том, что каждой ее точке X сопоставляется некоторая точка X'. Все точки X' образуют некоторую фигуру F', и говорят, что фигура F преобразуется в фигуру F'. Говорят также, что точка X', является *образом точки X*, а фигура F' — *образом фигуры F* для данного преобразования (пункт 4.1).

В учебнике никаких других общих определений, связанных с преобразованиями, не дается. Этих понятий достаточно для изучения всего материала, включенного в обязательный минимум содержания, как базового, так и углубленного курса геометрии.

Сопоставление точке ее образа обычно задается конструктивно, как результат некоторого геометрического построения.

Такое сопоставление происходит при проектировании (проецировании) точки пространства на плоскость, т. е. при изображении фигур в параллельной, ортогональной или центральной проекции. И в определениях конкретных видов движений (перемещений) — симметрий, поворота, переноса — также сопоставление точке ее образа задается конструктивно. Вспомните определения этих преобразований и геометрию построений, а затем укажите, какие построения необходимо выполнить при построении образов точек при этих преобразованиях.

3. Движения. В пространстве движения фигур определяются дословно так же, как и на плоскости, — это преобразования фигур, сохраняющие расстояния между точками.

План изучения движений в учебнике таков: движения являются самостоятельным объектом изучения, сначала рассматриваются частные виды движений — симметрии (пункт 24.3), поворот (пункт 24.4) и перенос (пункт 30.7), а затем формулируется теорема о том, что любое движение пространства является либо винтовым движением, либо зеркальным поворотом, либо скользящим отражением. Но в учебнике эта теорема лишь формулируется. Понятие движения позволяет дать общее определение равенства фигур, как фигур, совмещающихся некоторым движением.

Характеристические свойства частных видов движений позволяют их конструктивные определения дополнить дескриптивными. Например, перенос — это движение, сохраняющее направления, а центральная симметрия — это движение, изменяющее направления на противоположные.

Вот что писал А. Д. Александров, сравнивая механическое и геометрическое движении:

«Выясним более подробно связь того движения, которое определено в геометрии, с реальным движением.

Представим себе какое-нибудь реальное тело T в некотором определенном положении. Каждая его частица занимает определенное положение — находится в определенной точке X пространства. Допустим, предмет изменил свое положение. Это значит, каждая его частица заняла некоторое новое (или, в частности, старое) положение. Данная частица, бывшая в точке X, заняла положение в точке пространства X'; тем самым движение предмета устанавливает соответствие между точками пространства: точка X' соответствует точке X. (Можно сказать еще так: месту X, где находилась частица, соответствует место X', где она теперь находится.)

В механике тело называется твердым или даже абсолютно твердым, если оно не допускает никаких деформаций, так что расстояния между его частицами неизменны. Поэтому если при движении такого тела его частицы из точек X и Y перешли в частицы X' и Y', то расстояния сохраняются: $|X'\ Y'|=|XY|$, т. е. происходит движение, как мы его определили геометрически.

В геометрическом понятии движения удерживают только сопоставление одного положения тела с другим, вовсе отвлекаясь от процесса движения. Сам этот процесс мы будем называть непрерывным движением.

Оказывается, однако, что любое движение в геометрии представляет собой либо отвлеченный образ реального движения твердого тела, когда учитывается только то, из каких точек пространства в какие точки переходят частицы тела (т. е. учитывается только соответствие одних точек другим), либо сочетание (композицию) этого отвлеченного образа реального движения с отражением в плоскости.

Только что сказанное о движениях принадлежит не самой геометрии, а ее связи с физикой. Можно сказать, что геометрия выступает здесь как первая глава механики, трактующая механическое движение. Без движений геометрия не могла бы существовать. В самом деле, уже сравнение отрезков и измерение длин основано на движении предметов, когда один прикладывается к другому. И должно быть понятно, почему Ньютон в предисловии к своему великому труду «Математические начала натуральной философии» писал, что геометрия основывается на механике.

4. Общее понятие о симметрии. Симметрия правильных фигур. Симметрией фигуры вообще называется свойство фигуры, состоящее в том, что существует движение (отличное от тождественного), совмещающее ее саму с собой.

Движения фигуры, совмещающие ее саму с собой, называют ее *преобразованиями симметрии* (пункт 24.5). Преобразования симметрии фигуры обладают групповыми свойствами (относительно операции композиции преобразований). А именно, если движения совмещают фигуру саму с собой, то их композиция (в любом порядке) тоже совмещает эту фигуру саму с собой; если какое-то движение совмещает фигуру саму с собой, то обратное ему движение тоже совмещает фигуру саму с собой.

Совокупность всех преобразований симметрии фигуры (включая тождественное преобразование) называют ее *группой симметрии*.

Изучая симметрию различных фигур, имеющих в своих названиях слово *правильный* (*правильная*), можно заметить, что их симметрия богаче, чем у аналогичных фигур, не являющихся правильными. Например, максимальная симметричность многоугольника означает, для любых двух его вершин A и B и для любых двух его сторон a и b, исходящих из этих вершин, существует такая его симметрия (такое преобразование симметрии) f, что $f(A)=B$ и $f(a)=b$. Ясно, что у многоугольника, обладающего такой симметричностью, равны друг другу все его стороны и равны друг другу все его углы, т. е. он является правильным. Ясно также, что правильные многоугольники обладают указанной максимальной симметричностью.

Аналогичное верно и для правильных многогранников. Мы определили правильные многогранники как те, у которых равны друг другу ребра, углы граней и двугранные углы. Но можно было бы их определить как максимально симметричные многогранники. Это означает следующее. Если у правильного многогранника P взять вершину A, идущее из нее ребро a и грань α, прилегающую к этому ребру, а затем взять еще один такой набор из вершины A_1, ребра a_1 и грани α_1, то найдется такое движение многогранника P, которым вершина A, ребро a и грань α отображаются соответственно в вершину A_1, ребро a_1 и грань α_1. Это свойство является характеристическим свойством правильного многогранника — им обладают только правильные многогранники. Поэтому можно было бы определить правильный многогранник как многогранник, обладающий свойством максимальной симметричности.

Аналогичный подход возможен и для определения правильных призм и правильных пирамид. Подумайте, как дать такие определения.

5. Параллельное и центральное проектирования. Изучение стереометрии немыслимо без рисунков пространственных фигур. Ученики должны и уметь *видеть* то, что нарисовано, и уметь сами *рисовать* пространственные фигуры при решении задач и доказательствах теорем. В учебниках геометрии рисунки даны в *параллельной проекции*, и выполнять рисунки фигур ученики также будут в такой проекции. Поэтому изучение параллельного проектирования в учебнике происходит уже в главе 1 § 4. В § 4 рассматриваются важнейшие свойства параллельного проектирования, рассказывается, как изображаются в параллельной проекции разные фигуры. А о простейших правилах изображения на плоскости пространственных фигур говорится в этих учебниках уже во введении. И далее в курсе стереометрии, изучая какую-либо фигуру, мы всегда говорим, как она рисуется.

Но в живописи, при фотографировании используется более сложное, чем параллельное, — центральное проектирование (*перспектива*). Оно же проецирует на сетчатку нашего глаза видимый нами мир. О центральном проектировании кратко сказано в учебнике, а более подробное его изучение выходит за рамки как базового, так и углубленного курсов геометрии.

6. Соотношение синтетического и координатного методов при изучении преобразований. Начнем обсуждение этого вопроса с большой цитаты из нашей статьи: «Движениям в пространстве уделено внимания больше, чем в других курсах. К этому нас побуждали по крайней мере два обстоятельства. Во-первых, движения дают хороший наглядный материал, развивающий пространственные представления, например при рассмотрении элементов симметрии правильных многогранников. Во-вторых, геометрические движения связаны с такими важнейшими «вещами», как механическое движение и симметрия в природе и искусстве. Эта тема должна служить общему развитию учащихся и насыщению курса геометрии живым материалом. Например, учащимся, надо думать, будет интересно узнать, хотя бы без доказательства, тот факт, что всякое движение, какое можно осуществить непрерывно, представляет собой винтовое движение (включая как частные случаи параллельный перенос и поворот), иначе говоря, как ни переносить, ни крутить предмет, а его конечное положение можно получить одним винтовым движением.

Движения в пространстве служат самостоятельным объектом изучения, а не аппаратом для других тем. В связи с этим подчеркнем, что в данной книге мы сознательно пользуемся преимущественно одним традиционным синтетическим методом элементарной геометрии и лишь намечаем другие методы — координатный, векторный, метод движений. По нашему мнению, вряд ли возможно — да и нужно ли? — одновременно учить в средней школе всем этим методам.

В учебнике выбран тот из методов, который проще, важнее и естественнее для целей всеобщего среднего образования и соответствует самому существу геометрии.

Реформаторы преподавания геометрии, говоря о координатном и векторном методах, упускали из виду, что сама геометрия содержит в себе метод — прямой геометрический метод понимания, доказательства и решения задач и теорем: изобразить вопрос геометрически и увидеть его содержание и решение. А это и нужно как в самой математике, так и в еще большей степени в практической деятельности».

7. Координаты и метод координат. Считая традиционный синтетический метод основным в школьном курсе геометрии, А. Д. Александров в школьных учебниках о значении метода координат говорит так:

«Суть метода координат состоит в следующем. Во-первых, задавая фигуры уравнениями (неравенствами) и выражая в координатах различные геометрические соотношения, мы применяем алгебру и анализ к решению геометрических задач, к доказательству геометрических теорем.

Применение координат и алгебраических методов к исследованию геометрических объектов и к решению геометрических задач составляет раздел геометрии, называемый **аналитической геометрией**.

Во-вторых, пользуясь координатами, можно истолковывать алгебраические и аналитические соотношения и факты геометрически и так применять геометрию к алгебре и анализу. Графическое изображение функций — первый пример такого применения метода координат.

Через метод координат геометрия и алгебра с анализом, соединяясь и взаимодействуя, дают богатые плоды, которые они не могли бы дать, оставаясь разделенными. Их взаимное влияние составляет одну из главных внутренних пружин развития математики от Декарта и Ньютона до наших дней».

В § 29, посвященном прямоугольным координатам в пространстве, после их определения (пункт 29.1) отдельный пункт 29.2 посвящен построению точки с данными координатами: важно научить учеников правильно рисовать пространственные фигуры в системе координат. Умея это, нетрудно справиться на ЕГЭ со стереометрической задачей из раздела С.

Формула, выражающая расстояние между точками через их координаты (пункт 29.3), уже дает возможность решать многие задачи методом координат. Примеры таких задач, рассмотренные в п. 29.5, касаются пересечения сферы и плоскости, двух цилиндров.

Силу координатного метода следует продемонстрировать на задачах элементарной геометрии, решения которых синтетическим методом сложнее, чем координатным. В учебнике мы разбираем задачу о пересечении двух одинаковых цилиндров, оси которых пересекаются и взаимно перпендикулярны.

8. Векторы и векторный метод. Векторы, как и координаты, по своей природе — многомерны. Так что в параграфах 30 и 31 они рассматриваются по аналогии с тем, как это уже было сделано нами в планиметрии в наших учебниках 9 класса: сонаправленность и равенство векторов (пункт 30.2), сложение векторов и умножение вектора на число (пункты 30.3 и 30.4). Новым является понятие базиса и разложение вектора по базисным векторам в одномерном, двумерном и трехмерном случаях (пункт 30.5).

Векторный метод мы иллюстрируем на непростых задачах: о центре масс тетраэдра и доказательство теоремы Менелая (пункт 30.6). С помощью векторов изучается и параллельный перенос (пункт 30.7).

Координаты векторов и действия с ними рассматриваются в пунктах 31.1 и 31.2, а затем изучается скалярное умножение векторов (пункт 31.3). С его помощью выводятся уравнение плоскости (пункт 31.4) и формула расстояния точки до плоскости (пункт 31.5).

9. Заключение. О том, как развивается современная геометрия, какие задачи она решает, о ее многочисленных и разнообразных разделах, о том, как она связана с изучением физикой и астрономией окружающего нас пространства, говорится в Заключении учебника. Важно, чтобы выпускники школы знали о том, что геометрия — живая и растущая наука, а не застывший и окостеневший предмет.

При работе по Федеральному компоненту вы можете использовать литературу, указанную ниже, до 2013 года. А с 2013 года данный комплект учебно-методических пособий доработан в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом основного общего образования.

Литература

1. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия, 10—11. М.: «Просвещение», 2006—2013.
2. Евстафьева Л. П. Дидактические материалы по геометрии для 10—11 классов общеобразовательных учреждений. М.: «Просвещение», 2004—2013.
3. Александров А. Д. и др. Геометрия, 10—11. Книга для учителя. М.: «Просвещение», 2005.
4. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия, 10. М.: «Просвещение», 2006—2013.
5. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия, 11. М.: «Просвещение», 2008—2013.
6. Рыжик В. И. Дидактические материалы по геометрии для 10 класса с углубленным изучением математики. М.: «Просвещение», 2004.
7. Рыжик В. И. Дидактические материалы по геометрии для 11 класса с углубленным изучением математики. М.: «Просвещение», 2004.
8. Паповский В. М., Пульцин Н. М. Углубленное изучение геометрии в 10 классе. М.: «Просвещение», 1999—2013.
9. Паповский В. М., Аксенов К. М., Пратусевич М. Я. Углубленное изучение геометрии в 11 классе. М.: «Просвещение», 2002—2013.

Комментарии к решению отдельных задач учебника

X КЛАСС

Задачи к § 1

1.1. Аксиома 1 утверждает, что в пространстве существуют плоскости. Согласно этой аксиоме плоскостей не меньше двух. Возьмем три точки, не лежащие на одной прямой, на первой плоскости и любую точку на второй из них. Докажем, что эти четыре точки не лежат в одной плоскости. Предположим, такая — третья — плоскость есть. С первой плоскостью она имеет общую точку, даже три общие точки. Но тогда она должна иметь с ней общую прямую. Три их общие точки должны лежать на этой общей прямой, что противоречит выбору таких точек на первой плоскости. Наше предположение привело к противоречию, поэтому оно не является верным. Но тогда верно то, что требуется доказать.

1.5. Эти задачи предназначены для развития наглядных представлений, связаны с применением аксиоматики и, возможно, предостерегут учеников от собственных неверных рисунков. В каждом из рисунков, где есть ошибка, она обусловлена нарушением какой-либо аксиомы. Например, в задачах «а», «в» сечение имеет с передней гранью куба общую ломаную, а должен быть отрезок. В задаче «б» сечение имеет с левой гранью общую точку, но не имеет общего отрезка. Аналогично обстоят дела в задаче «г». В задаче «д» нижнее левое ребро имеет с сечением две общие точки (что выясняется в результате дополнительного построения), но не лежит в этой плоскости. Аналогичная ситуация в задачах «е», «ж». В задаче «з» можно проверить, лежат ли на одной прямой общие точки плоскости сечения и нижнего основания куба. Можно также посмотреть, сколько точек имеет прямая, проходящая через правое заднее ребро куба, с плоскостью сечения.

1.6. В задачах «а» — «г» нарушения аксиоматики очевидны. В задачах «д» и «е» можно посмотреть, сколько общих точек имеет прямая AB (PC) с плоскостью сечения.

1.12. а) На два многогранника, не являющихся тетраэдрами, тетраэдр разбивается после проведения, например, сечения, проходящего через середины двух боковых ребер и две середины основания.

Задачи к § 2

2.1. а) Так как прямая a имеет с плоскостью β общую точку (на прямой p), то она либо лежит в плоскости β, либо ее пересекает. Если она лежит в плоскости β, то получается, что две данные плоскости имеют две общие различные прямые. Но это невозможно. Значит, прямая a пересекает плоскость β.

б) Пусть прямая a пересекает плоскость β в точке A. Тогда эта точка является общей для плоскостей α и β. Но все общие точки двух плоскостей лежат на их общей прямой. Значит, точка A лежит на прямой p. Так как прямая a имеет общую точку с прямой p, то она либо совпадает с ней, либо пересекает ее. Если бы она совпадала с прямой p, то она лежала бы в плоскости β, что противоречит условию. Значит, она пересекает прямую p.

2.2. Возьмем на данной прямой a две точки. Через них проходит плоскость α (следствие 3 из п. 1.1). Тогда эта плоскость α проходит через данную прямую a (аксиома 3). Возьмем на проведенной плоскости α точку A, не лежащую на данной прямой a. Возьмем еще одну плоскость β (аксиома 1). На этой плоскости β возьмем любую точку B, не лежащую в плоскости α. На прямой AB возьмем любую точку C, отличную от точек A и B. Через данную прямую a и точку C проведем плоскость. Она будет отлична от плоскости α. За счет выбора точек на прямой AB мы сможем получить бесконечное число плоскостей, проходящих через данную прямую a.

2.8. Эту задачу имеет смысл решать сначала из наглядных соображений, даже ничего не рисуя, а только представляя себе некую переменную плоскость и ее возможное движение в пространстве относительно данного тетраэдра. И только затем проверить свои предположения о виде сечения решением соответствующих конструктивных задач.

Задачи к § 3

3.1. Так как прямые a и b параллельны, то они лежат в одной плоскости. Назовем ее плоскостью β. Плоскость β имеет с плоскостью α общую прямую a и общую точку, не лежащую на прямой a. Поэтому плоскости α и β совпадают. Но тогда прямая b лежит в плоскости α.

3.2. Предположим, есть вторая плоскость, в которой лежат эти прямые. Но тогда она имеет с первой плоскостью (плоскостью, в которой лежат эти прямые) три общие точки, не лежащие на одной прямой (две — на одной из данных прямых и одну — на другой). Значит, она совпадает с первой плоскостью, что противоречит нашему предположению. Значит, второй такой плоскости нет.

Задачи к главе I

I.1. Если точка K лежит в плоскости ABC, то такое расстояние найти несложно — это обычная планиметрическая задача, причем легкая. Ответ: $KC=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{2}$, $KC=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2}$. Но если точка K не лежит в плоскости ABC, то ситуация меняется. Пусть точка L — середина AB. При любом положении точки K $KL=\frac{\sqrt{15}}{2}$. Из треугольника KLC, используя теорему косинуса, можно установить границы для изменения KC: $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{2}\leqslant KC\leqslant\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2}$. Но при этом рассуждении молчаливо предполагается, что угол KLC увеличивается, находясь в одной и той же плоскости. Этот факт в данном месте курса не доказать. Поэтому если решать с учениками эту задачу в данный момент, то необходимо подчеркнуть, что окончательно задача пока решена быть не может.

Полезно эту ситуацию обыграть: сначала как бы ее решить и получить ответ, а потом обратить внимание на пробелы в рассуждении.

I.2. а) Каждый из этих отрезков является средней линией в треугольнике, являющемся гранью данного правильного тетраэдра. Поэтому каждый из этих отрезков равен 1.

б) Отрезок KM является медианой в равнобедренном треугольнике AMP, проведенной на основание AP. $KM=\sqrt{2}$. Аналогично вычисляется NL.

в) Угол NKL можно найти по теореме косинуса из треугольника NKL, в котором $NK=KL=1$, $NL=\sqrt{2}$. Он является прямым. Аналогично прямыми углами будут и все прочие углы, указанные в этом пункте.

г) Требуется доказать, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости. Для этого достаточно доказать, что $KL\parallel NM$. Хотя обе эти прямые параллельны прямой AB, проблема в том, что пока не доказана транзитивность параллельности прямых в пространстве. Поэтому приходится действовать иначе. Рассмотрим плоскость KLN и докажем, что она проходит через середину ребра BC, т. е. через точку M. Так как сечение тетраэдра плоскостью KLN имеет с плоскостью ABC общую точку N, то эти плоскости пересекаются по прямой. Пусть эта прямая пересекает прямую AB в точке T. Получается, что плоскость сечения имеет с гранью APB три общие точки: K, L, T, не лежащие на одной прямой, т. е. совпадает с гранью APB тетраэдра. Приходим к противоречию. Но тогда получается, что прямая пересечения плоскостей KLN и ABC не имеет общих точек с прямой AB, т. е. параллельна AB. Поэтому она проходит через точку M — середину BC. Тем самым доказано, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости. И так как в четырехугольнике $KLMN$ все углы прямые, то это прямоугольник. Тут же можно добавить, что он является квадратом.

д) В пункте «б» уже было доказано, что KM — медиана на основание AP в равнобедренном треугольнике AMP. Поэтому $KM \perp AP$. Аналогично $KM \perp BC$ из равнобедренного треугольника BKC. Точно так же доказывается, что LN является общим перпендикуляром к прямым AC и PB.

I.3. Пусть точка K — середина отрезка AB, точка L — середина отрезка CD. Найдем KL^2 из формулы для медианы треугольника KCD или из теоремы о сумме квадратов диагоналей параллелограмма: $(2KL)^2 + CD^2 = 2(KC^2 + KD^2)$. Найдем KC^2 из формулы для медианы треугольника ABC. Найдем KD^2 из формулы для медианы треугольника ABD. Любопытно заметить, что это решение возможно при любом расположении данных отрезков в пространстве, в частности когда они лежат в одной плоскости.

I.4. а) Пусть точка K — середина ребра BC. Из треугольника PBC находим: $PK = \sqrt{3}$, из треугольника ABC находим: $AK = \sqrt{3}$. Тогда $AQ = (2\sqrt{3})/3$. Из треугольника PAK находим по теореме косинуса: $\cos \angle PAK = \sqrt{3}/3$. И затем из треугольника PAQ находим по теореме косинуса: $PQ = 2\sqrt{2/3}$.

б) Пусть D — середина бокового ребра PA. PD находим из треугольника QDA по теореме косинуса $QD = 1$. Можно действовать иначе. Из треугольника PAQ по теореме косинуса вычислить, что угол PQA прямой. Но тогда медиана прямоугольного треугольника PQA равна половине гипотенузы PA. Здесь же надо обратить внимание на то, что все такие расстояния равны — из равенства соответствующих треугольников.

в) Пусть T — центр грани PBC. Из подобия треугольников KQT и KAP с коэффициентом $\frac{1}{3}$ получаем, что $QT = \frac{2}{3}$. Расстояние от Q до центра любой другой боковой грани будет таким же.

г) Одну из двух граней примем за основание правильного тетраэдра. Тогда задача сводится к предыдущей.

Замечание ко всей задаче. Боковое ребро принято за 2 для удобства вычислений. Можно взять, что оно равно 1, а можно сразу решать в общем случае, положив его равным a.

I.5. а) Пусть BT — общий отрезок этих сечений. Его длину найдем как длину медианы в треугольнике BKP, проведенной из вершины B: $BT = \frac{\sqrt{11}}{4}$.

б) Пусть медианы AM и BN пересекаются в точке Q, а медианы CM и BO пересекаются в точке R. Тогда отрезок QR является общим для двух сечений. Найдем его из треугольника QMR, подобного треугольнику AMC с коэффициентом $\frac{1}{3}$: $QR = \frac{1}{3}$.

в) Пусть медианы BO и PL пересекаются в точке U, а медианы PS и BN пересекаются в точке V. Тогда отрезок UV является общим для двух сечений. Найдем его из треугольника PUV, подобного треугольнику PLS с коэффициентом $\frac{2}{3}$: $QR = \frac{1}{3}$.

г) Общий отрезок этих сечений — NR. Найдем его из треугольника CNR по теореме косинуса: $NR^2 = CN^2 + CR^2 - 2CN \cdot CR \cos C$, где $\cos C$ вычислим из треугольника MCN: $\cos C = \frac{5}{6}$. Получим $NR = \frac{1}{2}$.

I.6. а) Такой прямой является прямая, соединяющая середины противоположных ребер правильного тетраэдра.

б) Нет.

Задачи к § 6

6.1. Все эти задачи могут быть решены по признакам равенства прямоугольных треугольников.

6.2. а) Так как $PK \perp AC$, то PK — высота в равнобедренном треугольнике APC, проведенная из его вершины, а потому точка K — середина AC. Но тогда в равнобедренном треугольнике ABC (у него равны стороны AB и BC как проекции равных наклонных PB и PC) BK — медиана, проведенная из вершины, а потому и высота.

б) Это утверждение доказывается аналогично.

6.6. в) Обозначим: $PA = a$, $BA = a_1$, $\angle APC = \beta$, $\angle ABC = \beta_1$, $AC = b$. Из треугольника APC имеем по теореме косинуса $b^2 = 2a^2(1 - \cos \beta)$. Из треугольника ABC имеем по теореме косинуса $b^2 = 2a_1^2(1 - \cos \beta_1)$. Сравнивая два полученных выражения для b^2, получаем равенство

$$a^2(1 - \cos \beta) = a_1^2(1 - \cos \beta_1).$$

При желании его можно переписать в таком виде:

$$a_1 : a = \left(\sin \frac{\beta}{2} : \sin \frac{\beta_1}{2}\right)^2.$$

г) Сохраним те же обозначения, что и в задаче «в», и добавим: $PB = h$. Из треугольника PBA по теореме Пифагора имеем $h = \sqrt{a_1^2 - a^2}$. Подставим вместо a_1 и a значения, полученные в пункте «в», и получим $h = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{2}} - \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta_1}{2}}}$.

Задачи к § 7

7.1. а) Так как у правильной призмы боковые грани — прямоугольники, то ее боковое ребро перпендикулярно двум ребрам основания, имеющим с этим боковым ребром общую вершину. Но тогда можно применить признак перпендикулярности прямой и плоскости, откуда и следует доказываемое утверждение.

б) В прямоугольном параллелепипеде боковое ребро перпендикулярно основанию. Поэтому его диагонали являются гипотенузами соответствующих равных прямоугольных треугольников.

7.2. б) Эта задача, по существу, решена при решении задачи 1.4б к главе I.

7.3. Искомой фигурой является плоскость серединных перпендикуляров данного отрезка. Докажем это. Пусть AB — данный отрезок, K — его середина. Обозначим множество точек, равноудаленных от концов данного отрезка, через F, а плоскость серединных перпендикуляров через G. Требуется доказать, что $F=G$. Для этого достаточно доказать два утверждения: 1) Если произвольная точка X принадлежит F, то она принадлежит G. 2) Утверждение, обратное утверждению 1.

1) Докажем первое утверждение. Проведем медиану XK в треугольнике AXB. Так как $XA=XB$, то XK — высота в этом треугольнике. Но тогда прямая XK — серединный перпендикуляр к отрезку AB. Все такие перпендикуляры принадлежат фигуре G. Значит, и точка K принадлежит фигуре G.

2) Докажем обратное утверждение. Пусть точка Y принадлежит плоскости серединных перпендикуляров. Проведем прямую YK. Так как точка Y принадлежит плоскости серединных перпендикуляров отрезка AB, то и прямая YK является серединным перпендикуляром отрезка AB. Тогда в треугольнике AYB отрезок YK является медианой и высотой. Но такой треугольник является равнобедренным, т. е. $YA=YB$. Значит, точка Y принадлежит фигуре F.

7.6. в) Обозначим середину ребра AC через P, середину ребра A_1C_1 через P_1. Так как $BA=BC$ и $PA=PC$, то $BP\perp AC$, а потому точка B лежит в плоскости серединных перпендикуляров к прямой AC. По той же причине в этой же плоскости серединных перпендикуляров лежат точки P_1 и B_1. Поэтому нужным нам сечением призмы является четырехугольник (прямоугольник) PP_1B_1B.

Задачи к § 8

8.3. Так как две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны, то задача сводится к планиметрической: найти боковую сторону прямоугольной трапеции, в которой известны три стороны.

8.4. Можно, например, воткнуть вертикально в землю шест. Тогда вертикальные объекты параллельны и можно свести задачу к планиметрической. Так измерял Фалес высоту египетских пирамид.

Задачи к § 9

9.1. Вершина правильной пирамиды равноудалена от всех вершин основания. Но тогда и ее проекция на плоскость основания будет равноудалена от всех вершин основания. Точкой, равноудаленной от всех вершин правильного многоугольника, лежащего в основании правильной пирамиды, при том, что эта точка лежит в плоскости данного правильного многоугольника, является его центр. Таким образом, центр основания правильной пирамиды является проекцией ее вершины на плоскость основания, а потому принадлежит высоте пирамиды.

9.2. Пусть M — данный многоугольник, точка K — его центр. Докажем первое утверждение. Пусть точка X равноудалена от всех вершин M. Тогда ее проекция на плоскость многоугольника равноудалена от всех вершин M, т. е. является центром окружности, описанной около M. Отсюда следует, что точка X лежит на прямой, проходящей через центр описанной около M окружности и перпендикулярной к плоскости многоугольника M.

Докажем обратное утверждение. Пусть точка Y принадлежит этой прямой. Соединим ее со всеми вершинами M. Оказывается, что у всех проведенных из точки Y наклонных к плоскости многоугольника M равны проекции. Но тогда равны и сами наклонные.

9.4. г)* Обозначим боковое ребро PB правильной треугольной пирамиды $PABC$ через x. Из боковой грани (пусть это будет грань PBC) находим BC: $BC = 2x\sin(\varphi/2)$. Пусть Q — центр основания ABC. Тогда $BQ = \frac{2}{\sqrt{3}}\,x\sin\frac{\varphi}{2}$. В прямоугольном треугольнике PBQ запишем теорему Пифагора: $x^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,x\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2 = 1$. Решив это уравнение, найдем боковое ребро пирамиды:

$$x = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{3}\sin^2\frac{\varphi}{2}}}.$$

9.8. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный куб. Докажем, что его диагональ B_1D перпендикулярна плоскости A_1BC_1. Сечение куба этой плоскостью представляет собой треугольник A_1BC_1. Пусть точка T является его центром. Рассмотрим тетраэдр $B_1A_1BC_1$. Он является правильной треугольной пирамидой с основанием A_1BC_1. Проведем высоту этой пирамиды из вершины B_1. Согласно задаче 8.1 она пройдет через центр основания — точку T. Рассмотрим тетраэдр DA_1BC_1. Он также является правильной треугольной пирамидой с основанием A_1BC_1. Проведем высоту этой пирамиды из вершины D. Согласно задаче 8.1 она пройдет через центр основания — точку T. Прямые B_1T и D_1T перпендикулярны одной и той же плоскости A_1BC_1 и имеют общую точку T, значит, они совпадают в силу единственности прямой, перпендикулярной данной плоскости и проходящей через данную точку. Иначе говоря, прямая B_1D перпендикулярна плоскости A_1BC_1.

9.11. Вид сечения зависит от вида пирамиды. Если пирамида «высокая и узкая», то сечение представляет собой треугольник (равнобедренный) с основанием AC. Если в вершине P сходятся три плоских прямых угла, то сечение представляет собой треугольник (равнобедренный прямоугольный) с основанием AC — боковую грань пирамиды. Если пирамида «низкая и широкая», то плоскость сечения будет иметь с пирамидой только общее ребро AC, которое и будет в данном случае сечением. Окончательно: сечением пирамиды такой плоскостью может быть треугольник или отрезок.

Рассмотрим такую пирамиду, сечением которой данной плоскостью является треугольник. Рассмотрим далее треугольники AXC, где X — некоторая точка ребра PB (может быть, и его конец). Площадь S такого треугольника вычисляется по формуле, где $S = 0{,}5 \cdot AC \cdot XK$, а K — середина ребра AC. (То, что XK является высотой в этом треугольнике, следует из того, что треугольник сечения AXK равнобедренный.) В этой формуле величина AC постоянная. Поэтому S будет иметь наименьшее значение тогда, когда будет наименьшим отрезок XK. Если плоскость AXC будет перпендикулярной к ребру PB, то и отрезок XK (лежащий в этой плоскости) будет перпендикулярен ребру PB. А когда он будет перпендикулярен ребру PB, он и будет наименьшим среди всех отрезков, соединяющих точку K с точками ребра PB. Итак, наименьшая площадь такого (треугольного) сечения будет в том случае, когда сечение AXC будет перпендикулярно ребру PB.

Задачи к § 10

10.1. а) Сначала проводим через данную точку прямую, перпендикулярную данной плоскости, а затем проводим плоскость через проведенную прямую.

б) Если прямая перпендикулярна плоскости, то достаточно взять любую плоскость, проходящую через данную прямую. Если прямая не перпендикулярна плоскости, то через любую точку данной прямой проведем перпендикуляр к плоскости. Затем построим плоскость, проходящую через данную прямую и проведенный перпендикуляр.

10.2. г) В правильной четырехугольной пирамиде плоскость основания перпендикулярна плоскости, которая проходит через вершину пирамиды и диагональ основания. Кроме того, могут быть перпендикулярны плоскости противоположных боковых граней. Стоит заметить, что не могут быть перпендикулярны плоскости соседних боковых граней.

10.3. Проведем перпендикуляр из данной точки на прямую пересечения двух данных плоскостей. Если он совпадает с данной прямой, то утверждение доказано. Если нет, то согласно свойству перпендикулярных плоскостей он будет перпендикулярен второй данной плоскости. Но тогда получается, что из данной точки на данную плоскость проведены два перпендикуляра, что невозможно.

10.16. в)* Предположим, что плоскость ACD будет перпендикулярна каждой из плоскостей ABC, ABD. Тогда согласно задаче 9.4 она будет перпендикулярна прямой их пересечения AB. Но если прямая AB перпендикулярна плоскости ACD, то она перпендикулярна любой прямой в этой плоскости, проходящей через точку A, в том числе и прямой AD. Тогда получается, что в треугольнике ABD два прямых угла — противоречие.

10.17. в)* Задачу можно решить с помощью вычислений. Пусть точка K — середина ребра AB, точка L — середина ребра CD. Пусть сторона данного равностороннего треугольника равна 1. Найдем CK и DK. Так как плоскости ABC и ABD перпендикулярны, то треугольник CKD прямоугольный, а потому можно найти CD. Из равнобедренного треугольника ACD находим его медиану AL. Аналогично такой же будет и медиана BL треугольника CBL. Из треугольника ALB находим по теореме косинуса угол ALB. Так как этот косинус не равен нулю, то угол ALB не является прямым, а потому и плоскости ACD и BCD не являются перпендикулярными.

10.20. Здесь возможны два случая: две перпендикулярные грани, о которых говорится в условии, могут быть смежными и могут быть противоположными. В последнем случае они содержат боковые стороны трапеции. В такой ситуации высота пирамиды будет лежать вне пирамиды и соединять вершину пирамиды с точкой пересечения продолжений боковых сторон трапеции.

Стоит заметить, что еще один случай, когда грани пирамиды, перпендикулярные ее основанию, проходят через параллельные стороны трапеции, не имеет места. Предположим, что такое возможно, т. е. через два основания трапеции проходят грани пирамиды, перпендикулярные ее основанию. Тогда прямая пересечения плоскостей, содержащих эти грани, также будет перпендикулярна основанию. Так как плоскость каждой из этих граней перпендикулярна основанию, то общая прямая этих плоскостей, являясь перпендикуляром к основанию, должна лежать в каждой из этих граней и при этом пересекать основания трапеции. Но тогда, имея две общие точки с плоскостью основания трапеции, эта прямая должна лежать в плоскости основания трапеции. Это невозможно, так как она перпендикулярна плоскости основания трапеции.

10.22. в)* Таким сечением является прямоугольник AA_1C_1C.

10.23. в)* Таким сечением является треугольник PKL, где точка K — середина ребра AB, а точка L — середина ребра CD.

Задачи к § 11

11.1. Эти плоскости параллельны, так как каждая из них перпендикулярна одному и тому же боковому ребру данного многогранника.

11.4. Либо они насажены перпендикулярно на одну ось, либо на параллельные оси. Причем эта ось (оси) перпендикулярна одной и той же плоской поверхности.

11.5. Основная идея: точку подвеса груза и центр масс предмета должна соединять вертикальная прямая.

а) Для этого достаточно закрепить тросы в углах плиты. Так как центр масс этой плиты проектируется в центр прямоугольника, являющегося ее основанием, то это обеспечит ее равновесие.

б) Достаточно взять веревки равной длины и закрепить их одним концом на крюке, а другим на кольце, причем так, чтобы расстояния между закрепленными концами были одинаковы. Центр масс кольца находится в центре окружности, описанной около треугольника, образованного концами веревки на кольце.

11.9. 1) в) Пусть точка S — середина ребра AC. Проведем сечение пирамиды PSB, а в нем отрезок DF, параллельный BS, при этом точка F лежит на отрезке PS. Затем через точку F проведем отрезок KL в грани PAC, параллельный AC, при этом точка K лежит на ребре PA, точка L лежит на ребре PC. Сечение KLD будет искомым.

3) Для случая «в» из п. 1) замечаем, что треугольник DKL подобен треугольнику ABC (по трем сторонам), причем коэффициент подобия равен $\frac{1}{2}$. Поэтому отношение их площадей равно $\frac{1}{4}$.

Задачи к § 12

12.1. б) Пусть даны прямая a и плоскость α. Прямая b параллельна прямой a и плоскости α. Требуется доказать, что прямая a параллельна плоскости α. Возможны два случая. 1. Плоскость, проходящая через прямые a и b, параллельна плоскости α. Тогда все очевидно. 2. Пусть теперь плоскость, проходящая через эти прямые, пересекает плоскость α по некоторой прямой c. Тогда прямые b и c параллельны, и согласно транзитивности параллельности прямых прямые a и c параллельны. Из параллельности прямых a и c и следует параллельность прямой a и плоскости α.

в) Пусть даны прямая a и плоскость α. Прямая b перпендикулярна прямой a и плоскости α. Требуется доказать, что прямая a параллельна плоскости α. Так как прямая b перпендикулярна и прямой a, и плоскости α, то она пересекает и прямую a, и плоскость α. Плоскость, проходящая через прямые a и b, пересекает плоскость α по прямой c, параллельной прямой a. Так как прямая b перпендикулярна плоскости α, то она перпендикулярна прямой c.

г) Пусть даны прямая a и плоскость α. Плоскость β перпендикулярна прямой a и плоскости α. Требуется доказать, что прямая a параллельна плоскости α. Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой p, прямая a и плоскость β пересекаются в точке A. Проведем через точку A прямую b, перпендикулярную прямой p. Эта прямая будет перпендикулярна плоскости α. Кроме того, она будет перпендикулярна и прямой a. Тем самым все свелось к предыдущей задаче.

12.2. б) Эта параллельность следует из того, что в основании призмы есть пара пересекающихся прямых, каждая из которых параллельна соответствующей прямой (лежащей в одной и той же боковой грани) другого основания.

12.6. а) Сначала через точку O проведем прямую KL, параллельную прямой AC ($K \in AB$, $L \in BC$). Она будет параллельна плоскости PAC. Затем проведем сечение тетраэдра PMB ($M \in AC$, $AM = MC$). В плоскости PMB проведем прямую QT, параллельную прямой PM ($T \in PB$). Она будет параллельна плоскости PAC. Проведем сечение тетраэдра плоскостью KTL. Все отрезки, лежащие в тетраэдре, выходящие из точки Q и параллельные грани PAC, находятся в треугольнике KTL. Таким образом, требуется найти наибольший и наименьший из отрезков, расположенных в треугольнике KTL и проходящих через точку Q. Ясно, что наибольшим отрезком в равностороннем треугольнике KTL является отрезок QT. А наименьшим отрезком такого вида будет отрезок, выходящий из точки Q и перпендикулярный отрезку LT, т. е. высота в прямоугольном треугольнике LQT, проведенная из вершины прямого угла Q на гипотенузу LT.

12.8. в) Пусть $PABCD$ — данная четырехугольная пирамида с основанием $ABCD$. Проведем отрезок KL, параллельный отрезку CD ($K \in AD$, $L \in BC$). Треугольник KPL лежит в плоскости, параллельной ребру CD. Он является равнобедренным ($PK = PL$). Его площадь S вычисляется по формуле $S = 0{,}5KL \cdot PN$, где PN — его высота (и медиана). В этой формуле основание KL равнобедренного треугольника KPL постоянно, меняется только высота PN. Рассмотрим высоту PN, когда она находится в прямоугольном треугольнике KQM (Q — центр основания пирамиды, M — середина ребра CD). Ясно, что PN уменьшается от PM до PQ. Поэтому наименьшее значение площади треугольника KPL достигается, когда точка N совпадает с точкой Q. А наибольшего значения у площади этого треугольника нет, так как при совпадении точки N с точкой M сечение перестает быть параллельным ребру CD, ибо оно через это ребро проходит. В заключение стоит добавить, что мы рассмотрели только те сечения, которые проходят через отрезок KL, находящийся с одной стороны от точки Q. С другой стороны от нее ситуация будет симметричная.

Задачи к § 13

13.1. Для доказательства достаточно рассмотреть прямоугольный треугольник, в котором один из катетов — боковое ребро прямоугольного параллелепипеда, а другой катет — диагональ основания этого параллелепипеда, имеющая с взятым боковым ребром общую вершину.

13.2. Оказывается, для решения задачи длина стороны данного правильного треугольника не является необходимой величиной. Более того, ее можно вычислить, исходя из других данных задачи. Это видно в процессе такого решения. Пусть точка O — центр данного треугольника, точка K — середина стороны AB. Тогда из соответствующих прямоугольных треугольников имеем такие зависимости: $AO^2 = d_2^2 - d_1^2$, $KO^2 = d_3^2 - d_1^2$. Кроме того, из треугольника AKO имеем соотношение: $AO = 2KO$. Далее, из алгебраических выкладок мы приходим к такому равенству: $4\,d_3^2 - d_2^2 = 3\,d_1^2$.

Аналогично решается задача для правильного n-угольника.

13.3. Здесь надо рассмотреть несколько случаев в зависимости от величины угла, который луч OC образует с лучами OA и OB. Самый простой случай — когда этот угол прямой. Тогда прямая OC перпендикулярна плоскости AOB и проекцией точки C на плоскость AOB является точка O. Далее возможны два случая: когда этот угол острый и когда он тупой. Рассмотрим случай острого угла. Проведем перпендикуляры CA_1 и CB_1 из точки C на лучи OA и OB соответственно. Из точек A_1 и B_1 проведем перпендикуляры к лучам OB и OA соответственно до их взаимного пересечения в точке C_1. Докажем, что точка C_1 является проекцией точки C на плоскость AOB. Прямая OB перпендикулярна плоскости CB_1C_1, поэтому плоскость AOB перпендикулярна плоскости CB_1C_1. Прямая OA перпендикулярна плоскости CA_1C_1, поэтому плоскость AOB перпендикулярна плоскости CA_1C_1. Оказалось, что плоскости CB_1C_1 и CA_1C_1 перпендикулярны плоскости AOB. Но тогда и CC_1 — прямая их пересечения — перпендикулярна плоскости AOB, а потому точка C_1 является проекцией точки C на плоскость AOB. Теперь можно заметить, что точка C_1 лежит на биссектрисе угла AOB. Из равенства треугольников COB_1 и COA_1 следует, что $OB_1 = OA_1$. Из равенства треугольников OB_1C_1 и OA_1C_1 следует, что $C_1B_1 = C_1A_1$. Но тогда точка C_1 угла AOB равноудалена от его сторон. Поэтому она лежит на биссектрисе этого угла. Таким образом, получаем, что проекции всех точек луча OC лежат на биссектрисе угла AOB.

Если же исходный угол, образованный лучом OC с лучами OA и OB, будет тупым, то проще всего рассмотреть угол $A'OB'$, вертикальный с углом AOB. С лучами OA' и OB' луч OC будет образовывать уже острые углы, а потому этот случай сведется к предыдущему. Поэтому проекции всех точек луча OC на плоскость AOB будут лежать на биссектрисе угла, вертикального с углом AOB.

13.12. а) Достаточно воспользоваться результатом задачи 13.1.

13.15. Достаточно знать длину столба, высоту, на которой будет крепиться провод к стене и расстояние между основанием столба и проекцией на землю точки закрепления провода и стены.

13.19. а) Проведем прямую OC, перпендикулярную прямой p. Тогда $AC \perp p$ и $BC \perp p$. Получилось, что прямые CA, CO, CB, проходящие через одну и ту же точку C, перпендикулярны одной и той же прямой p. Такие прямые лежат в одной плоскости — плоскости перпендикуляров. Поэтому все четыре точки — O, A, B, C, лежащие на этих прямых, оказываются в одной плоскости. Значит, прямые AB и OC лежат в одной плоскости.

13.20. б) Проведем перпендикуляр из точки K гипотенузы AB на катет AC. Из треугольника AMK выразим AK: $AK = \frac{x}{\sqrt{2}}$. Проведем LM. Это и будет перпендикуляр из L на AC. Его длину найдем из прямоугольного треугольника LKM по формуле $LM^2 = \left(\frac{x^2}{2}\right) + 1$. Так как $0 < x < \sqrt{2}$, то LM изменяется в границах от 1 до 2. Аналогично находятся границы для перпендикуляра из L на BC.

13.31. Расстояние от точки K до прямой BC может равняться расстоянию от точки K до прямой AC, если точка K будет в вершине P.

Расстояние от точки K до плоскости ABC может равняться расстоянию от точки K до плоскости APC, если точка K будет в середине PB. Для получения этого результата достаточно рассмотреть треугольник PLB, где точка L — середина ребра AC. Перпендикуляры из точки K на плоскости ABC и APC находятся в треугольнике PLB и являются перпендикулярами на прямые PL и BL. Отсюда все и следует.

Задачи к § 14

14.1. Пусть даны две плоскости α и β. Точки A и B лежат на плоскости α, точки C и D лежат на плоскости β, при этом $AC \parallel BD$. Проведем плоскость через прямые AC и BD. Эта плоскость пересечет данные параллельные плоскости по параллельным прямым, поэтому $ABDC$ — параллелограмм. Но тогда $AC = BD$. Разумеется, обратное утверждение не является верным.

14.2. Такой фигурой является плоскость, параллельная данным плоскостям и проходящая через середину общего перпендикуляра данных плоскостей. Докажем это. Пусть даны две плоскости α и β, AB — общий перпендикуляр этих плоскостей, причем точка A принадлежит плоскости α, а точка B принадлежит плоскости β. Пусть плоскость γ параллельна данным плоскостям и проходит через середину AB. Докажем два утверждения: 1) Каждая точка плоскости γ равноудалена от плоскостей α и β. 2) Любая точка вне плоскости γ не будет равноудалена от плоскостей α и β.

1) Пусть AB пересекает плоскость γ в точке C. Возьмем произвольную точку X плоскости γ, отличную от C, и докажем, что она равноудалена от плоскостей α и β. Проведем через точку X общий перпендикуляр YZ двух данных плоскостей (Y — на плоскости α, Z — на плоскости β). Тогда XY — это расстояние от X до α, XZ — это расстояние от X до β. Таким образом, нам требуется доказать равенство отрезков XY и XZ. Для этого рассмотрим плоскость $ABZY$ и четырехугольник $ABZY$. Он является прямоугольником, при этом XC в этом прямоугольнике перпендикулярен AB и проходит через середину AB. Но тогда $XY = XZ$.

2) Возьмем теперь точку P вне плоскости γ, проведем через нее общий перпендикуляр ST двух данных плоскостей. Из аналогичных соображений несложно доказать, что отрезки PS и PT не равны. Но тогда не равны расстояния от точки P до данных плоскостей.

14.3. Следует рассмотреть два случая: когда в основании призмы находится правильный многоугольник с четным числом сторон и когда в основании призмы находится правильный многоугольник с нечетным числом сторон. Разберем эти два случая на конкретных примерах — когда данная призма шестиугольная и когда она пятиугольная.

Пусть $A_1A_2A_3A_4A_5A_6B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ — правильная шестиугольная призма. Рассмотрим сечение призмы плоскостью $A_1A_4B_1$. Оно является прямоугольником. Отрезок O_1O_2, соединяющий центры основания призмы O_1 и O_2, лежит в этом прямоугольнике и является его средней линией. Из свойств прямоугольника следует, что $O_1O_2 \perp A_1A_4$. Подобный результат получится, если рассмотреть другое аналогичное сечение призмы, например $A_2A_5B_2$: $O_1O_2 \perp A_2A_5$. Но тогда $O_1O_2 \perp$ $\perp (A_1A_2A_3)$.

Пусть теперь $A_1A_2A_3A_4A_5B_1B_2B_3B_4B_5$ — правильная пятиугольная призма. «Превратим» ее в правильную десятиугольную, построив во внешнюю сторону на каждой стороне каждого основания равные равнобедренные треугольники (так называемая операция удвоения сторон правильного многоугольника). При этом центр основания данной пятиугольной призмы и центр основания построенной десятиугольной призмы будут совпадать. А для призмы с четным числом сторон в основании мы эту задачу уже решили.

Разумеется, возможны и другие решения этой задачи, даже без ссылок на планиметрию.

14.5. Задача сводится к планиметрической. Проведем прямую, проходящую через точку A и перпендикулярную плоскости α (а значит, и β). Через построенную прямую проведем плоскость — она будет перпендикулярна данным плоскостям. Теперь решим задачу «в построенной плоскости» или даже «в построенной прямой». Необходимо рассмотреть разные случаи — их будет всего 5 — расположения точки A относительно полученных прямых пересечения данных плоскостей и построенной плоскости.

14.6. Задача может быть сведена к планиметрической. Для этого достаточно провести прямую, перпендикулярную всем этим плоскостям. Тогда все расстояния между плоскостями будут равны соответствующим расстояниям между точками пересечения этой прямой с данными плоскостями.

14.8. б) Высотой прямоугольного параллелепипеда является, в частности, его ребро. Обозначим три измерения прямоугольного параллелепипеда как a, b, c. Пусть с ребром a диагональ образует угол 60°, с ребром b образует угол 30°, а ребро c является его высотой. Тогда получаем, что $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$. С другой стороны, выполняется равенство $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ (квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов его измерений). Подставим в это равенство найденные значения для a и b. Получим, что $c=0$. Можно сказать, что при этом параллелепипед вырождается в прямоугольник, но все-таки это уже не параллелепипед. Значит, данные в задаче противоречивы — параллелепипед с такими свойствами не существует. Поэтому вычислять его высоту бессмысленно. Правда, обнаружилось это именно в процессе вычисления высоты. Можно ли было получить это противоречие как-то иначе? Да, если использовать соотношение между плоскими углами в трехгранном угле: сумма двух его любых углов должна быть больше третьего. А в нашей задаче сумма углов $60°$ и $30°$ дает как раз $90°$, т. е. два плоских угла, образованные диагональю с ребрами, дают в сумме такую же величину, как третий плоский угол, являющийся углом прямоугольника.

14.10. Может показаться странным, что, по существу, одну и ту же задачу предлагается решить в трех случаях. Дело вот в чем. Проекцией точки A_1 будет некая точка A_0 на биссектрисе угла CAB. Однако неясно, будет ли A_0 лежать в треугольнике ABC или она выйдет за пределы этого треугольника. Интуитивно ясно, что, чем длиннее боковое ребро призмы AA_1, тем дальше от точки A будет точка A_0. Поэтому рассмотрим треугольник AA_1K, где точка K — середина стороны BC. Осталось выяснить, каким по виду будет угол AKA_1. Рассмотрим тот случай, когда $AA_1=2$. Тогда $A_1C=2$, $CK=1$, $A_1K=\sqrt{3}$. По теореме косинуса из треугольника AA_1K видим, что в этом случае угол K является острым, а потому A_0 находится на отрезке AK, т. е. в треугольнике ABC.

14.14. в) Прямая BD параллельна плоскости AB_1D_1. Поэтому достаточно найти расстояние от любой точки прямой BD до плоскости AB_1D_1. Пусть точка O — центр нижнего основания данного параллелепипеда, а точка O_1 — центр его верхнего основания. Тогда искомое расстояние можно найти как высоту в прямоугольном треугольнике AOO_1, проведенную на его гипотенузу. Ответ получается практически устно.

14.17. Сведем эту задачу к планиметрической. Для этого проведем плоскость, перпендикулярную любой из данных прямых. Она будет перпендикулярна и к другим данным прямым, поскольку все они параллельны. Точки пересечения этих прямых с проведенной плоскостью являются вершинами прямоугольного треугольника. Это вытекает из того, что данные плоскости перпендикулярны. Таким образом, надо выяснить, в каких границах находится высота прямоугольного треугольника, проведенная на его гипотенузу, равную 1. Ответ очевиден: от 0 до 0,5.

14.18. а) Спроектируем точку A на прямую b. Пусть проекцией будет точка B.Отрезок AB является общим перпендикуляром прямых a и b, а также перпендикуляром из точки A на прямую b. Это совпадение перпендикуляров и доказывает требуемое равенство.

б) Имеет смысл рассматривать случай скрещивающихся прямых. Пусть AB — общий перпендикуляр прямых a и b ($A \in a$, $B \in b$). Пусть, далее, прямая a_1 проходит через точку B и параллельна прямой α. Плоскость, проходящую через прямые b и a_1, назовем α. Тогда прямая a_1 является проекцией прямой a на плоскость α. Пусть теперь XK — перпендикуляр из точки X на прямую b, XL — перпендикуляр из точки X на прямую a_1 (и тем самым перпендикуляр на плоскость α). Тогда LK — перпендикуляр из точки L на прямую b. При движении точки X к точке A по прямой a в одном направлении расстояние XL не меняется, а расстояние LK будет уменьшаться. Поэтому и расстояние XK (т. е. расстояние от точки X до прямой b) также будет уменьшаться. После того как точка X пройдет через точку A, процесс пойдет в обратную сторону — расстояние от X до b будет увеличиваться.

14.19. а) Искомое расстояние равно расстоянию между параллельными плоскостями, в которых лежат данные прямые. Но этими плоскостями являются противоположные грани куба. Поэтому искомое расстояние равно 1.

б) Решение такое же, как в пункте «а».

в) Прямая AD параллельна плоскости BCA_1D_1, в которой лежит прямая CD_1. Для нахождения искомого расстояния достаточно найти расстояние от какой-либо точки прямой AD до плоскости BCA_1D_1. Таким расстоянием является расстояние от точки D до прямой CD_1. Оно равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

г) Эти прямые лежат в параллельных плоскостях CD_1B_1 и A_1DB соответственно. Каждая из них перпендикулярна AC — диагонали куба. При этом диагональ AC делится этими плоскостями на три равные части. Поэтому искомое расстояние равно $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

д) Прямая AC параллельна плоскости B_1KDL, где точка K — середина ребра CC_1, а точка L — середина ребра AA_1. Достаточно найти расстояние до этой плоскости от какой-либо точки прямой AC. Возьмем для этого точку O — центр грани $ABCD$. Перпендикуляр из точки O на плоскость $BKDL$ будет перпендикуляром из точки O на прямую B_1D. Найдем сначала расстояние до этой плоскости от точки B — оно равно высоте прямоугольного треугольника B_1BD, проведенной на гипотенузу B_1D. Тогда расстояние от точки O до этой плоскости будет в два раза меньше этого. Ответ: $\mathbf{0{,}5\sqrt{\frac{2}{3}}}$.

14.23. Если ножки имеют разную длину, то может быть так, что поверхность стола, после того как он упрется в пол тремя ножками, не будет параллельна полу.

Задачи к § 15

15.1. б) Через произвольную точку A прямой a проведем перпендикуляр AB на данную плоскость. Через прямые a и AB проведем плоскость β. Прямая c пересечения плоскостей α и β будет параллельна прямой a. Так как прямая b перпендикулярна α, то и прямая AB перпендикулярна α. Но тогда AB перпендикулярна прямой c. Отсюда получается, что она перпендикулярна прямой a. Согласно определению угла между скрещивающимися прямыми данные прямые a и b перпендикулярны.

Обратное утверждение сформулируем так: если плоскость и не лежащая в ней прямая перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны. Это утверждение верно и доказывается аналогично прямому утверждению.

15.2. Для доказательства этого утверждения (и обратного) достаточно провести прямую c, параллельную прямой a и проходящую через точку пересечения прямой b с данной плоскостью. Прямая c будет лежать в данной плоскости. Далее потребуются ссылки на теорему о трех перпендикулярах и определение угла между двумя скрещивающимися прямыми.

15.3. Это утверждение вытекает из определения угла между скрещивающимися прямыми, так как перпендикуляры к одной и той же плоскости параллельны.

15.4. з) Сначала рассмотрим треугольник BD_1C и найдем угол B в этом треугольнике. Угол между лучами D_1B и BC, равный данному, будет дополнять этот найденный угол до $180°$.

и) Сначала можно рассмотреть треугольник CBA_1 и найти в нем угол C.

к) Сначала можно рассмотреть треугольник ADB_1 и найти в нем угол D.

15.6. а) Рассмотрим обобщение этого утверждения. Возьмем произвольный треугольник ABC и будем вращать его вокруг какой-либо прямой, проходящей через одну из его сторон, например вокруг прямой AB. Вершина C при таком вращении все время находится в плоскости, перпендикулярной прямой AB. Пусть C_1 и C_2 — два положения точки C. Прямая C_1C_2 все время будет находиться в этой же плоскости. Но тогда она будет перпендикулярна прямой AB.

15.7. г) Для нахождения этого угла достаточно рассмотреть треугольник A_1DB. Ответ: **60°**.

15.8. а) Рассмотрим случай, когда прямые p и AB скрещиваются. Требуется проверить два утверждения. Первое такое: $(AB \subset \alpha) \wedge (\alpha \perp p) \Rightarrow p \perp AB$. Второе такое: $p \perp AB \Rightarrow (\exists\alpha)$: $(AB \subset \alpha) \wedge (\alpha \perp p)$. Первое утверждение следует из понимания перпендикулярности двух скрещивающихся прямых. Для доказательства второго утверждения достаточно провести перпендикуляр AC из точки A на прямую p. Плоскость ACB будет той самой плоскостью α, что следует из признака перпендикулярности прямой и плоскости. Заметим, что первое утверждение соответствует слову «тогда», а второе — обороту «только тогда».

15.9. Эта задача является, по существу, планиметрической и решается из рассмотрения прямоугольного треугольника ABC.

15.14. Проведем прямую c, параллельную прямой b и пересекающую прямую a. Угол между b и α будет равен углу между c и α. А этот угол можно найти из треугольника с вершинами в точках пересечения: прямых a и c, прямой a и плоскости α, прямой c и плоскости α.

15.15. Рассмотрим нормаль к данной плоскости, т. е. прямую, ей перпендикулярную. Утверждение об угле между прямой и плоскостью можно свести к утверждению о прямой и нормали к этой плоскости. В частности, равенство $\angle a\alpha = \angle b\alpha$, где a и b — параллельные прямые, пересекающие плоскость α, можно заменить на равносильное: $\angle ac = \angle bc$, где c — нормаль к плоскости α. А так как все нормали к одной и той же плоскости параллельны, то верно равенство $\angle ac = \angle bc$, откуда и следует доказываемое утверждение. Обратное утверждение, разумеется, неверно.

15.19. Во всех задачах этого номера для вычисления искомых углов можно использовать нормаль к заданной плоскости. Рассмотрим, к примеру, задачу 2а. Нормалью к плоскости AB_1C_1D является прямая A_1B. Угол между прямыми A_1D и A_1B находится из треугольника A_1BD — он равен $60°$. Поэтому искомый угол равен $30°$.

15.21. Высота H объекта над землей вычисляется по формуле $H = d \sin \varphi$, где d — расстояние до объекта от наблюдателя, а φ — угол, под которым виден объект наблюдателем. При увеличении d и уменьшении φ сказать, что происходит с H в общем случае, невозможно. В конкретном случае все находится из вычислений.

15.22. По мере того как Солнце поднимается над горизонтом, увеличивается угол, который составляет с поверхностью Земли луч от вершины дерева на Солнце. Высота дерева постоянна, и длину тени можно найти, разделив высоту дерева на тангенс угла наклона этого луча.

Задачи к главе II

II.2. Пусть точка K — середина стороны BC. Сравним половины рассматриваемых углов — углы KXC и KAC. Из прямоугольного треугольника KXC имеем $\sin \angle KXC = KC : XC$. Из прямоугольного треугольника KAC имеем $\sin \angle KAC = KC : AC$. А так как $XC > AC$, то $\sin \angle KXC < \sin \angle KAC$. Поэтому $\angle KXC < \angle KAC$ (так как углы KXC и KAC острые). Но тогда и угол BXC меньше угла BAC.

Задачу можно решить иначе, из наглядно ясных представлений — «положив» треугольник BXC на плоскость BAC. Тогда точка X «ляжет» дальше от точки K, чем точка A. Дальше получаем результат уже из соображений планиметрии.

II.5. а) Для того чтобы доказать перпендикулярность прямой AD и плоскости α, достаточно доказать перпендикулярность прямой AD и еще одной прямой (кроме AB), лежащей в плоскости α. Возьмем на прямой a любую точку X, отличную от B, и докажем, что $DA \perp AX$. Для этого достаточно доказать, что $DX^2 = DA^2 + AX^2$. Для проверки этого равенства выразим DX^2 по теореме Пифагора из треугольника DBX: $DX^2 = DB^2 + BX^2$; затем выразим DB^2 по теореме Пифагора из треугольника DAB: $DB^2 = DA^2 + AB^2$; далее выразим BX^2 по теореме Пифагора из треугольника ABX: $BX^2 = AX^2 - AB^2$. Подставим полученные значения для DB^2 и BX^2 в первое равенство и получим то, что требуется.

б) Решается по той же схеме, что и задача «а».

II.6. Будем считать, что квадрат находится по одну сторону от плоскости α. Обозначим отрезки, проведенные до плоскости α из точек A, B, C, D, как A_1, B_1, C_1, D_1. Ясно, что четырехугольник ACC_1A_1 является трапецией или параллелограммом. В любом из этих случаев выполняется равенство $AA_1 + CC_1 = 2OO_1$. Аналогично из четырехугольника BDD_1B_1 получаем равенство $BB_1 + DD_1 = 2OO_1$. Но тогда верно равенство

$$AA_1 + CC_1 = BB_1 + DD_1 \quad (*).$$

Теперь можно перейти к подпунктам в этой задаче.

а) Ясно, что равенство любых трех чисел в равенстве (*) приводит к тому, что и четвертое число равно им же.

б) Ясно, что равенства любых двух из чисел в равенстве (*) недостаточно, чтобы им равнялись оставшиеся два числа. Это ясно также из наглядных соображений, если «покрутить» квадрат вокруг AD (при равенстве AA_1 и DD_1) или вокруг AC (при равенстве AA_1 и CC_1).

в) Рассмотрим тот случай, когда из четырех длин проведенных отрезков известны длины двух отрезков, проведенных через две соседние вершины квадрата. Тогда из формулы (*) мы сможем найти длины всех четырех проведенных отрезков. И сторона квадрата в этом случае нам даже не понадобится.

Пусть теперь нам известны длины двух отрезков, проведенных из противоположных вершин квадрата, например AA_1 и CC_1. Тогда информация о длине отрезка OO_1 является излишней, ведь он равен полусумме этих двух известных отрезков. Будем теперь мысленно вращать квадрат с фиксированной стороной вокруг AC. Ясно, что при этом длины отрезков BB_1 и DD_1 будут меняться, а потому и не представляется возможным их вычислить.

г) Результат получим из наглядно ясных соображений. Наибольший и наименьший из этих четырех отрезков получится тогда, когда плоскость квадрата будет перпендикулярна плоскости α.

II.10. г) Единственность такой пары параллельных плоскостей моментально следует из результата задачи II.7. Согласно ей прямые пересечения двух пар соответственно параллельных плоскостей параллельны между собой. Если теперь мы предположим, что через две скрещивающиеся прямые проходят две пары соответственно параллельных плоскостей, то получим противоречие.

II.11. 1) г) Заметим, что PB перпендикулярна плоскости BCK. Пусть точка L — середина ребра BC, QM — перпендикуляр из точки Q на плоскость BCK. Легко доказать, что точка M лежит на отрезке KL. Тогда из подобия треугольников LMQ и LKB получаем нужный результат: $QM = \left(\frac{1}{3}\right)BK$. 2) Каждое из этих сечений подобно треугольнику BCP: одно — с коэффициентом $\frac{1}{2}$, другое — с коэффициентом $\frac{2}{3}$. Отсюда получаем отношение площадей этих сечений — $\frac{9}{16}$. 3) Такое сечение будет прямоугольником. Одна его сторона составляет $\left(\frac{2}{3}\right)BC = \frac{2}{3}$, а другая — $\left(\frac{1}{3}\right)PA = \frac{1}{3}$. Поэтому его площадь будет равна $\frac{2}{9}$. 5) Проведем перпендикуляр из точки K на плоскость BCP. Он попадет на отрезок PL, где точка L — середина BC. Любая плоскость, перпендикулярная грани PBC и проходящая через точку K, будет проходить через этот перпендикуляр. Сечение тетраэдра такой плоскостью может быть треугольником или четырехугольником.

II.12. 1) в) Этот перпендикуляр можно вычислить как половину высоты в равнобедренном треугольнике PLM (L — середина AB, M — середина CD), проведенной из точки L на сторону PM. 2) в) Таким сечением является трапеция $ANKD$ (N — середина ребра PB). 3) б) В сечении PBD проведем отрезок EF, параллельный PD ($E \in PB$, $F \in BD$). В плоскости основания проведем отрезок ST, параллельный AC. Сечение пирамиды, проходящее через ST и EF, будет искомым. Оно может быть треугольником, пятиугольником или точкой B. Из таких сечений имеет смысл исключить сечения, проходящие через AC и PD (прямая, лежащая в плоскости, не параллельна ей). Но можно ради общности и оставить их, предварительно оговорив эту ситуацию. 4) а) Для построения такого сечения полезно на основании пирамиды и в треугольнике PBD провести отрезок, параллельный BD. 4) б) Для построения такого сечения полезно в треугольниках PCD и PAB провести отрезок, параллельный CD. 5) Для построения таких сечений полезно сначала провести перпендикуляры из точек K (в задачах «а» и «в») и Q (в задаче «б») на указанные плоскости.

II.13). Имеет смысл рассматривать всю конфигурацию в процессе вращения вокруг данной диагонали. Тогда наибольшее значение проекции каждого рассматриваемого отрезка — ребра или диагонали куба — будет достигаться тогда, когда этот отрезок будет лежать в плоскости α. А наименьшее значение этой проекции достигается тогда, когда угол между этим отрезком (точнее, прямой, содержащей этот отрезок) и плоскостью α будет наибольшим (это следует из того, что проекция отрезка на плоскость равна самому отрезку, умноженному на косинус угла между отрезком и плоскостью). В свою очередь, этот угол будет наибольшим, когда рассматриваемый отрезок будет находиться в плоскости, проходящей через данную диагональ куба и перпендикулярной плоскости α. Дальнейшее решение задачи чисто планиметрическое.

II.14. Пусть $ABCD$ — данный параллелограмм. Пусть известны расстояния до плоскости α от вершин A, B, C и требуется найти расстояние до плоскости α от вершины D. Воспользуемся тем фактом, что расстояние до плоскости от середины отрезка равно полусумме расстояний до этой плоскости от его концов. Пусть точка O — центр данного параллелограмма. Тогда выполняется равенство $|O\alpha| = 0{,}5(|A\alpha| + |C\alpha|) = 0{,}5(|B\alpha| + |D\alpha|)$. Отсюда и получается, что, зная три расстояния от вершин, можно найти расстояние от четвертой вершины.

Если параллелограмм будет лежать с разных сторон от плоскости α, то можно сделать параллельный перенос данной плоскости так, чтобы весь параллелограмм оказался с одной стороны от новой плоскости. При этом направление параллельного переноса задается прямой, перпендикулярной данной плоскости. Тем самым мы придем к уже решенной задаче. Останется только учесть расстояние, на которое мы перенесли данную плоскость.

II.15. Прототипом этой задачи является задача о нахождении эпицентра землетрясения по данным трех сейсмических станций. Можно считать, что расстояния между наблюдателями известны. Так как наблюдатели видели и слышали взрыв, то, зная скорость звука, они могут вычислить расстояния до точки, в которой произошел взрыв. Дальше переводим задачу на геометрический язык. Известны все шесть ребер тетраэдра, и требуется найти его высоту. Такая задача имеет решение, причем единственное. Осталось теперь придумать, как это сделать. Пусть $PABC$ — данный тетраэдр, PQ — его высота. Будем считать для определенности, что треугольник ABC остроугольный и точка Q находится внутри треугольника ABC. Проведем QK — перпендикуляр из точки Q на AC и отрезок PK. По теореме о трех перпендикулярах получается, что PK — высота в треугольнике APC. Так как в треугольнике APC известны все стороны, то мы можем найти PK, а затем и CK. Сделаем такое же построение еще раз, проведя перпендикуляр QL из точки Q на сторону BC, а затем PL. Далее вычисляем CL. Теперь вспомним, что мы решаем практическую задачу, и будем действовать так. На листе бумаги построим треугольник ABC в определенном масштабе. Далее на его сторонах CA и CB отложим (в том же масштабе) отрезки CK и CL соответственно. Через полученные точки проведем прямые, перпендикулярные сторонам CA и CB соответственно. Они пересекутся в точке Q (точнее, ей соответствующей). Измерим (на листе бумаги) отрезок QK. Затем, учтя масштаб, найдем его реальную длину. И наконец, по теореме Пифагора из треугольника PQK найдем высоту PQ тетраэдра.

Задача решается и при других начальных условиях, зависящих от вида треугольника ABC и положения точки Q относительно него. А вот двух наблюдателей для ее решения недостаточно. Геометрически этот результат ясен из наглядных представлений. Пусть, например, известны только AC, PA и PB. Вращая треугольник вокруг AC, мы получим разные по высоте положения точки P над плоскостью ABC.

II.16. Будем рассматривать такой случай, когда проекция точки на плоскость α находится внутри данного угла. Пусть теперь A — данная точка, O — данный угол, D — проекция точки A на плоскость α, B и C — проекции точки A на стороны угла. Из треугольников ABO и ACO находим по теореме Пифагора отрезки OC и OB. Дальше решаем планиметрическую задачу: зная OB, OC и угол O, найти $BD(CD)$. Продлим отрезок BD до пересечения в точке K с одной стороной данного угла. Продлим отрезок CD до пересечения в точке L с другой стороной данного угла. Составим для отрезков BD и CD такую систему, обозначив $BD = x$, а $CD = y$:

$$x + y/\sin(90^\circ - \varphi) = OB \operatorname{tg} \varphi, \quad y + x/\sin(90^\circ - \varphi) = OC \operatorname{tg} \varphi.$$

Решив эту систему, найдем BD. Затем из треугольника ABD по теореме Пифагора найдем AD.

II.19. По существу, задача аналогична задаче 16 к этой главе. Для нахождения этого угла достаточно найти высоту тетраэдра, т. е. расстояние от вершины тетраэдра до плоскости его основания. Именно это и было сделано в задаче 16.

II.21. Стандартное решение состоит в следующем. Примем боковое ребро этой пирамиды за 1. Далее вычислим все необходимые отрезки и найдем искомые углы с помощью тригонометрических функций из каких-либо прямоугольных треугольников или по теореме косинуса. Разумеется, можно считать, что боковое ребро равно a. Конечный результат от этого не зависит, ибо все правильные треугольные пирамиды с заданным плоским углом при вершине подобны, а потому все соответственные углы у них одинаковы.

II.22. Проведем через любую точку данной прямой плоскость, ей перпендикулярную. Она будет перпендикулярна и прямой пересечения данных плоскостей, так как она параллельна данной. Но тогда она будет перпендикулярна и данным плоскостям. Теперь рассмотрим получившуюся конфигурацию в проведенной плоскости. Мы получим такую задачу. Известен угол, точка внутри его удалена на известные расстояния от его сторон. Требуется найти расстояние от нее до вершины этого угла.

II.23. Введем такие обозначения: расстояние от точки A до плоскости β обозначим h_A, расстояние от точки A до прямой p обозначим d_A, расстояние от точки B до плоскости α обозначим h_B, расстояние от точки B до прямой p обозначим d_B. Очевидны равенства: $h_A = d_A \sin\varphi$, $h_B = d_B \sin\varphi$. Из этих формул и следует требуемая равносильность.

II.24. В задаче «б» есть некоторая тонкость. Требуется найти расстояние от вершины основания до боковой грани, а не до плоскости боковой грани, т. е. надо искать расстояние от точки до треугольника, а не до его плоскости. При такой постановке задачи надо выяснить положение проекции вершины основания на плоскость боковой грани. Если эта проекция находится за пределами боковой грани, то расстояние от вершины основания до боковой грани будет равно боковому ребру этой пирамиды. Аналогичный результат будет и тогда, когда проекцией вершины основания будет вершина пирамиды. Наиболее содержательный случай будет, когда проекцией вершины основания является точка внутри боковой грани. Легко показать, что она принадлежит апофеме пирамиды, т. е. высоте боковой грани, проведенной из вершины пирамиды. Но тогда задача сводится к планиметрической: найти высоту в треугольнике, если все три его стороны известны (в нашем случае их можно вычислить — это боковое ребро пирамиды, апофема пирамиды и высота в треугольнике, являющемся основанием пирамиды).

II.25. б) В этой задаче есть несколько случаев в зависимости от величины угла φ: 1) $\varphi = 0°$; 2) $0° < \varphi \leqslant \varphi_0$, где

φ_0 — угол, тангенс которого равен $AA_1 : AT = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (точка T — середина ребра BC); 3) $\varphi_0 < \varphi < 90°$; 4) $\varphi = 90°$. (Некоторые случаи можно объединить.) В случае 2 сечением является треугольник, и найти его площадь не составляет труда. В случае 3 сечением является равнобокая трапеция. Чтобы вычислить ее площадь, сначала осуществим такое построение этого сечения. На продолжении ребра AA_1 за точку A_1 выберем некоторую точку K и проведем отрезки KB и KC. Пусть они пересекают ребра A_1B_1 и A_1C_1 в точках L и M соответственно. Тогда искомым сечением является трапеция $BLMC$. Угол между плоскостью сечения и основанием — это угол KTA. Площадь этого сечения может быть найдена как разность площадей треугольников KLM и KBC. Эти треугольники подобны, и отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия, т. е. отношению $KA_1 : KA$. Это отношение легко находится. В самом деле, $KA = AT \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \varphi$, а $KA_1 = KA - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \varphi - 1$.

XI КЛАСС

Задачи к § 16

16.1. Проведем плоскость через прямую, соединяющую центры данных сфер. Каждую сферу эта плоскость пересечет по окружности. Таким образом, задача сводится к планиметрической.

16.2. Для доказательства перпендикулярности этих прямой и плоскости достаточно доказать, что прямая OO_1 перпендикулярна двум прямым на плоскости сечения, проходящим через его центр. Проведем сначала одну плоскость через прямую OO_1. Она пересечет плоскость данного сечения по прямой. Эта прямая «встретит» данную сферу в двух точках: A и B. Каждая из этих точек лежит на сфере, а потому $OA = OB$. Но тогда треугольник AOB равнобедренный и его медиана OO_1 является высотой. Поэтому $OO_1 \perp AB$. Точно так же доказывается перпендикулярность OO_1 еще одной прямой.

16.3. Пусть даны две сферы. Первая сфера — с центром A и радиусом R_1, вторая сфера — с центром B и радиусом R_2. Пусть точка K — какая-то их общая точка, причем не единственная. Проведем через точку K плоскость, перпендикулярную прямой AB. Пусть эта плоскость пересекает прямую AB в точке L. Докажем, что окружность с центром в точке L и радиусом LK, лежащая в проведенной плоскости, и является линией пересечения двух сфер. Для этого докажем два утверждения. Сначала докажем, что любая точка этой окружности находится на каждой из данных сфер, а потому лежит на линии их пересечения. Пусть некоторая точка X принадлежит этой окружности. Рассмотрим два треугольника: AXL и AKL. Они прямоугольные, имеют равные катеты LX и LK, а также общий катет LA. Значит, они равны. Но тогда $XA = KA = R_1$. Отсюда следует, что точка X принадлежит первой сфере. Так же доказывается, что она принадлежит второй сфере, тем самым линии пересечения двух сфер.

Докажем теперь второе утверждение. Возьмем любую точку Y, общую для двух сфер, и докажем, что она принадлежит построенной окружности. Любой треугольник AYB равен треугольнику AKB. Поэтому во всех треугольниках AYB высоты, проведенные из точек Y, будут падать в одну и ту же точку L прямой AB. Так как все перпендикуляры к данной прямой, проходящие через одну и ту же ее точку, лежат в одной плоскости, то все точки Y также лежат в одной и той же плоскости. Значит, эта линия плоская. А так как все эти высоты YL равны, то каждая точка Y удалена от L на одно и то же расстояние, т. е. на расстояние LK. Значит, любая общая точка Y лежит на окружности с центром L и радиусом LK.

16.7. б) Здесь надо различать два случая: когда шары имеют общую точку, тогда расстояние между ними равно 0, и когда они не имеют общих точек. Если они не имеют общих точек, то расстояние между ними равно $d - (R_1 + R_2)$. Докажем это. Пусть центры шаров — A и B. Пусть прямая AB пересекает сферы этих шаров в точках K и L. Возьмем произвольные точки X и Y в этих шарах. Рассмотрим отрезок AB и неплоскую ломаную $AXYB$. Согласно неравенству треугольника имеем неравенство $AB = AK + KL + LB \leqslant AX + XY + YB$. Но $AX = AK$, $YB = BL$, а потому $KL \leqslant XY$, причем равенство достигается, когда точки X и Y совпадают с точками K и L. Итак, KL — кратчайший отрезок, соединяющий точки шаров, а его длина является расстоянием между шарами.

16.11. С самого начала будем считать, что данные точки не являются концами одного и того же диаметра. В этом случае все сечения будут большими кругами данного шара, а потому равновелики. Полезно представить себе плоскость, проходящую через прямую, содержащую две данные точки — назовем их A и B. Пусть эта плоскость вращается вокруг AB. Ясно, что наибольшая площадь сечения получится тогда, когда оно проходит через центр сферы O — просто большего сечения в шаре не бывает. А наименьшая площадь получится тогда, когда эта плоскость будет перпендикулярна плоскости OAB и будет проходить через прямую AB. Докажем это. Наименьшее сечение получится тогда, когда его радиус будет наименьшим, т. е. тогда, когда расстояние от центра сферы до центра сечения будет наибольшим. Пусть точка O_1 является центром того сечения, которое перпендикулярно плоскости OAB, а точка O_2 — центр любого сечения, которое проходит через AB, но при этом O_2 не совпадает ни с точкой O, ни с точкой O_1. В прямоугольном треугольнике OO_2O_1 видим, что OO_2 — катет, а OO_1 — гипотенуза. Поэтому $OO_1 > OO_2$. Значит, сечение с центром O_1 имеет наименьшую возможную площадь. Всю эту конфигурацию можно свести к планиметрической. Надо нарисовать круг с центром O, хорду AB этого круга, перпендикулярную этому диаметру, с серединой O_1, еще одну хорду этого круга, проходящую через точку O_1, с серединой O_2.

16.13. в) Пусть центр данной сферы — точка O, точка A — фиксированная точка данной сферы, AB — хорда данной сферы данной длины. Рассмотрим сферу с центром в точке A и радиусом AB. Сферы с центрами в точках O и A пересекаются, тогда линия их пересечения является окружностью. На этой окружности и лежат концы всех хорд, выходящих из точки A и равных AB.

16.14. б) Пусть точка O — центр данной сферы, AB — один из таких лучей. Рассмотрим сферу с центром в точке A и радиусом AB. Сферы с центрами в точках O и A пересекаются, тогда линия их пересечения является окружностью. На этой окружности и лежат все точки касания лучей, выходящих из точки A.

16.15. а) Рассмотрим сечение всей этой конфигурации плоскостью, проходящей через диаметр. Получим круг. Пусть его центр — точка O, AB — взятый диаметр данного шара, CD — хорда круга, равная диаметру щели, точка K — середина хорды CD. Обозначим $KB = h$. Тогда $AK = 2R - h$. Из прямоугольного треугольника ACB имеем такое равенство: $r^2 = h(2R - h)$. Получили квадратное уравнение относительно h, решив которое найдем неизвестную величину h. При этом надо учитывать необходимость выполнения неравенства $0 < h < 2R$.

16.16. б) Расстояние от точки X до шара равно разности расстояний OX и радиуса шара.

16.20. Проведем плоскость через центр данного шара, перпендикулярную ребру двугранного угла. Тем самым получим планиметрическую задачу: внутри угла величиной φ лежит точка, удаленная на равные расстояния от его сторон, причем эти расстояния известны. Учитывая, что такая точка лежит на биссектрисе угла, легко получить решение.

16.21. в) Если на сфере даны две точки, не являющиеся диаметрально противоположными, то через них можно провести не больше двух окружностей данного радиуса, иногда только одну, а то и вовсе ни одной. Результат зависит от соотношения следующих параметров: радиуса сферы, радиуса данной окружности и расстояния между данными точками.

Если же на сфере даны три точки, то можно провести не больше одной окружности с данным радиусом.

16.22. Задача о разбиении сферы тремя окружностями равносильна задаче о разбиении пространства тремя плоскостями. Таких частей может быть 4, 5, 6, 8.

16.23. Пусть A — точка, лежащая на шестидесятой параллели сферы с центром O. Это означает, что луч OA составляет с плоскостью экватора угол, равный $60°$. Но тогда этот луч составляет угол величиной $30°$ с направлением юг — север. Тогда радиус окружности r, представляющей собой шестидесятую параллель, вычисляется по формуле $r = R\sin 30°$, где R — радиус данной сферы. Отсюда получаем $r = R/2$. Из этой формулы следует, что отношение длин этих параллелей (как и всех прочих) на Земле и Луне равно отношению радиусов Земли и Луны.

Задачи к § 18

18.1. Этой фигурой является прямоугольник или отрезок. Рассмотрим доказательство для случая, когда сечение не проходит через ось цилиндра или проходит только через образующую его поверхности. Возьмем две образующие его поверхности AB и CD (точки A и D на нижнем основании). Проведем через них плоскость, что возможно ввиду их параллельности. Кроме того, эта плоскость будет отвечать условию задачи, т. е. параллельна оси. Четырехугольник $ABCD$ будет параллелограммом, ибо $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$. А так как образующие прямого цилиндра перпендикулярны его основаниям, то этот параллелограмм является прямоугольником.

18.2. Рассмотрим осевое сечение цилиндра. Оно является прямоугольником. Значит, около него можно описать окружность. Центр O этой окружности и будет центром описанной сферы. Для этого достаточно убедиться в том, что расстояние от центра O до любой точки окружности любого основания цилиндра равно радиусу проведенной окружности, т. е. одно и то же. Это достаточно ясно, ибо все осевые сечения цилиндра равны.

18.3. Рассмотрим осевое сечение цилиндра. Оно является прямоугольником. Значит, в него можно вписать окружность тогда и только тогда, когда оно является квадратом. В данном случае центр O этой окружности и будет центром вписанной сферы. Для этого достаточно убедиться в том, что расстояние от центра O до оснований цилиндра равно расстоянию от этого центра до боковой поверхности цилиндра и равно радиусу проведенной окружности, т. е. одно и то же. Это достаточно ясно, ибо все осевые сечения цилиндра равны.

18.9. в) Задачи на тела вращения имеет смысл по возможности сводить к планиметрическим. Чаще всего это достигается рассмотрением их осевых сечений.

Пусть прямоугольник $ABCD$ является осевым сечением цилиндра, вписанного в шар с центром O. Тогда точка O является пересечением диагоналей прямоугольника $ABCD$. Площадь S этого прямоугольника вычисляется по формуле $S = AB \cdot CD$. Введем обозначения: $AB = x$, $CD = y$. Тогда приходим к равенству $S = xy$. Для дальнейшего решения лучше работать с равносильным ему равенством $S^2 = x^2y^2$ (равносильность обеспечена положительностью всех входящих в эту формулу величин). Из прямоугольного треугольника ACD имеем такое соотношение: $x^2 + y^2 = 4R^2$. Из него следует, что сумма двух положительных чисел x^2 и y^2 постоянна. Но известно, что их произведение в этом случае имеет наибольшее значение и достигается при их равенстве. Поэтому наибольшее значение произведения чисел x^2 и y^2, а значит, x и y достигается при $x = y$. Это означает, что наибольшую площадь из всех вписанных в окружность прямоугольников имеет квадрат. Возвращаясь к исходной задаче, приходим к такому результату: из всех цилиндров, вписанных в данный шар, наибольшая площадь осевого сечения у цилиндра с квадратным осевым сечением. Разумеется, сам результат может быть получен и из других соображений, в частности из свойств квадратного трехчлена или с использованием производной.

18.11*. Задача «в» сводится к такой планиметрической задаче: в заданный угол φ вписывается окружность радиуса R, чему равно расстояние от центра окружности до вершины угла? Для получения такой планиметрической конфигурации достаточно рассмотреть сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной ребру данного двугранного угла и проходящей через его центр симметрии. Обозначим центр окружности через O (он же центр симметрии), вершину угла через A, точки касания окружности и сторон угла через B и C. В прямоугольном треугольнике OBC имеем $OA = R / \sin(\varphi/2)$. Это и есть ответ.

Задачи к § 19

19.1. Для решения достаточно рассмотреть осевое сечение конуса. Из подобия треугольников получаем результат $S = \pi R^2 x^2 / H^2$.

19.2. Рассмотрим осевое сечение конуса. Оно является равнобедренным треугольником. Значит, около него можно описать окружность. Центр O этой окружности и будет центром описанной сферы. Для этого достаточно убедиться в том, что расстояние от O до любой точки окружности основания конуса равно расстоянию от O до вершины конуса и равно радиусу проведенной окружности, т. е. одно и то же. Это вполне ясно, ибо все осевые сечения конуса равны.

19.3. Рассмотрим осевое сечение конуса. Оно является равнобедренным треугольником. Значит, в него можно вписать окружность. В данном случае центр O этой окружности и будет центром вписанной сферы. Для этого достаточно убедиться в том, что расстояние от центра O до основания конуса равно расстоянию от этого центра до любой образующей боковой поверхности конуса и равно радиусу проведенной окружности, т. е. одно и то же. Это вполне ясно, ибо все осевые сечения конуса равны.

19.7. в) Сведем эту задачу к планиметрической, проведя осевое сечение конуса. Картинка будет такой: в окружность вписан равнобедренный треугольник, являющийся осевым сечением конуса. Еще лучше рассмотреть «половинку» — прямоугольный треугольник, гипотенузой которого является диаметр описанной окружности (и описанной около конуса сферы) такого треугольника. Нужные нам формулы сразу следуют из известных метрических соотношений в прямоугольном треугольнике.

19.9. б)* Здесь эффектно работают так называемые соображения непрерывности. В вершине осевого сечения конуса согласно условию находится тупой угол. Пусть диаметром основания является отрезок AB. Начнем теперь двигать по окружности точку B по направлению к точке A. При достаточной близости этих точек угол при вершине осевого сечения станет острым. Значит, в каком-то промежуточном положении этот угол будет прямым.

Возможно и аналитическое доказательство. Пусть равнобедренный треугольник с боковой стороной l и основанием d является сечением конуса. Для того чтобы он был прямоугольным, необходимо и достаточно выполнение условия $d^2 = 2l^2$ и при этом должно выполняться неравенство $d < 2R$, где R — радиус основания конуса. Но оно выполняется, поскольку согласно условию треугольник в осевом сечении тупоугольный, а потому верно неравенство $(2R)^2 > 2l^2$.

19.10. Все обратные утверждения верны. Проверим одно из них. Пусть в данном конусе образующая поверхности равна L, высота равна H.Рассмотрим сечение этого конуса, которое образует с плоскостью основания фиксированный угол φ. В этом сечении, которое является равнобедренным треугольником, боковая сторона равна L. Высота его, проведенная к основанию, равна $H : \operatorname{tg} \varphi$, а потому также является константой. Равнобедренные треугольники с одной и той же (по длине) боковой стороной и постоянной высотой к основанию равны.

19.12. Для этого найдем радиус круга, вписанного в осевое сечение конуса.

19.13. Задача сводится к нахождению границ для площади равнобедренного треугольника, вписанного в окружность радиуса 2. Пусть ABC — такой треугольник, причем $AC = BC$. Пусть CD — диаметр описанной около него окружности и точка K — точка пересечения AB и CD. Обозначим $AK = a$, $CK = h$. Тогда площадь S этого треугольника можно записать по формуле $S = ah$. Удобнее для дальнейших выкладок записать равносильное равенство: $S^2 = a^2h^2$. Далее, из прямоугольного треугольника ACD имеем такое соотношение: $a^2 = h(2R - h) = h(4 - h)$. Подставим полученное выражение для a^2 в формулу для S^2 и придем к такому равенству: $S^2 = h(4 - h)h^2 = h^3(4 - h)$. Задача свелась к нахождению наибольшего и наименьшего значений функции $h^3(4 - h)$ при условии, что $0 < h < 4$. Используя производную, эту задачу легко решить. Следует также заметить, что решение не зависит от положения центра описанной окружности относительно данного треугольника. В самом деле, особенности рисунка никак не используются.

И наконец, вполне очевидно, что наименьшего значения у такой площади нет. Для этого достаточно начать сближать точки A и B — площадь треугольника при этом устремится к нулю.

Задачи к § 21

21.1. Сначала опишем около данной призмы прямой круговой цилиндр, а затем около этого цилиндра опишем сферу. Эта сфера описана около данной призмы.

21.2. Впишем в правильную призму прямой круговой цилиндр. Сфера будет вписана в данную призму тогда и только тогда, когда она вписана в построенный цилиндр. А это возможно тогда и только тогда, когда осевым сечением цилиндра является квадрат. Таким образом, приходим к результату: в правильную призму можно вписать сферу тогда и только тогда, когда середина оси призмы равноудалена от всех ее граней.

21.3. Сначала опишем около данного прямоугольного параллелепипеда прямой круговой цилиндр, а затем около этого цилиндра опишем сферу. Именно эта сфера и будет описанной около данного прямоугольного параллелепипеда. Это можно сделать всегда.

Впишем в данный прямоугольный параллелепипед прямой круговой цилиндр. Сфера будет вписана в данный прямоугольный параллелепипед тогда и только тогда, когда она вписана в построенный цилиндр. А это возможно тогда и только тогда, когда осевым сечением цилиндра является квадрат. Таким образом, приходим к результату: в данный прямоугольный параллелепипед можно вписать сферу тогда и только тогда, когда центр симметрии параллелепипеда равноудален от всех его граней.

21.4. Нужный нам результат получается из того, что квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его ребер, выходящих из одной и той же вершины.

21.8. в) Перед нами типичный пример исследовательской задачи. Не сказано, к какому результату мы должны прийти. Мы сами должны сформулировать перед собой некоторые вопросы и постараться на них ответить. Треугольники по виду различаются по сторонам и углам. Поэтому можно поставить такие вопросы: может ли в сечении призмы получиться равнобедренный и даже равносторонний треугольник? Можно ли в сечении этой призмы получить остроугольный треугольник, прямоугольный треугольник и тупоугольный треугольник? Некоторые из этих вопросов достаточно просты, и ответ на них следует почти моментально. Например, равносторонний треугольник (а потому и остроугольный) получается, если провести сечение, параллельное основанию. Равнобедренный треугольник можно получить, если провести сечение через ребро основания и противолежащую вершину другого основания. Разумеется, возможны и другие ответы. Остальные вопросы потруднее. Например, разносторонний треугольник получается, если взять три такие его вершины: одна — это вершина основания призмы, а две другие его вершины лежат на его ребрах, причем на разных расстояниях от этого основания. Еще труднее ответить на вопрос о прямоугольном и тупоугольном сечении этой призмы. Поэтому ситуацию исследования можно упростить. Например, поставить такой вопрос: можно ли получить в сечении прямоугольный треугольник, гипотенузой которого является диагональ AB_1 грани призмы $ABCA_1B_1C_1$, а вершина прямого угла лежит на боковом ребре призмы? Обозначим эту вершину на ребре DD_1 через K. Пусть $DK = x$. Для того чтобы такой треугольник AB_1K был прямоугольным, необходимо и достаточно выполнение равенства $(1 + x^2) + (1 + (1 - x)^2) = 2$. При решении этого уравнения необходимо учитывать ограничения на переменную x: $0 \leqslant x \leqslant 1$. В результате оказывается, что найденные корни уравнения не удовлетворяют этим ограничениям, а потому такого рода сечения не существует.

Аналогичная по духу работа проделывается и для выяснения того, каким четырехугольником может быть сечение такой призмы. Квадрат, прямоугольник и равнобокая трапеция вполне очевидны. Несложно доказать, к примеру, что сечение не может быть ромбом общего вида, отличным от квадрата. В призме 5 граней, а в ромбе 4 стороны. Значит, обязательно плоскостью сечения пересекается одно из оснований призмы. Для получения ромба необходимо иметь в сечении пару параллельных сторон, поэтому необходимо пересечение и другого основания призмы. Другую пару параллельных сторон мы можем получить на боковых гранях призмы. Но тогда в сечении получается либо прямоугольник, либо трапеция, либо пятиугольник.

21.14. г) Радиус описанного шара равен половине диагонали параллелепипеда.

21.15. в)* Сошлемся на результат задачи 21.4. Согласно ему сумма квадратов этих трех косинусов равна 1. Два угла в данных нашей задачи равны 30° и 60°. Сумма квадратов косинусов этих двух углов равна как раз 1, и на долю третьего косинуса ничего не остается, точнее, он равен 0. Но тогда получается, что диагональ параллелепипеда составляет с третьим ребром параллелепипеда прямой угол, что невозможно. Поэтому данные в этой задаче противоречивы — такого параллелепипеда не существует.

21.17. Эта задача известна из занимательной литературы по математике. Можно поставить коробок (иначе говоря, прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$) с диагональю AC_1 на угол стола вершиной A (ребра AB и AD идут по краю стола) и отметить на столе точку, до которой дошло его ребро AB. Затем переместить параллельно самому себе коробок в новое положение на расстояние AB так, чтобы новое положение вершины A совпало со старым положением вершины B. Коробок в новом положении как бы пристроился к своему старому положению. Но теперь диагональ коробка равна отрезку, который соединяет старое положение точки A с новым положением точки D_1. Этот отрезок находится вне коробка, а потому его легко измерить.

21.18. б) Здесь надо рассмотреть разные случаи расположения граней: они могут быть параллельны, а могут и пересекаться.

в) И здесь надо рассмотреть разное взаимное положение этих граней: три из них могут иметь общую точку, но могут и не иметь.

21.21. д) Расстояние между скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра. Таковым является высота ромба $ABCD$, проведенная из вершины A на прямую CD.

21.22. 2)* Традиционно основанием параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ считают грань, названную $ABCD$, хотя это и необязательно. Так как прямая AB перпендикулярна прямым AD и AA_1, то она перпендикулярна плоскости AA_1D. Но тогда грани AA_1D_1D и BB_1C_1C перпендикулярны основанию $ABCD$. Поэтому вершины основания $A_1B_1C_1D_1$ проектируются на нижнее основание в точки, лежащие на прямых AD и BC. При этом, учитывая данные задачи, проекциями точек A_1, B_1 будут точки A_0, B_0 — середины ребер AD и BC, а проекциями точек C_1, D_1 будут точки C_0 и D_0, такие, что $DD_0 = CC_0 = 0{,}5AD$. Для сравнения углов лучше здесь воспользоваться их тангенсами. Так как высоты параллелепипеда, проведенные к основанию, равны, то останется только сравнить длины отрезков A_0C, B_0D, AC_0, BD_0, что не составляет труда.

Задачи к § 22

22.1. а) Пусть PQ — высота правильной пирамиды, проведенная из вершины P, AB — ребро ее основания, точка K — середина ребра AB. Проведем QK и PK. Так как AB перпендикулярно QK и PK, то AB перпендикулярно плоскости PQK. Тогда плоскости PAB и PQK перпендикулярны. Отсюда и следует требуемое утверждение.

г) Пусть AB и BC — два соседних ребра основания правильной пирамиды. Перпендикуляры из точек A и C на боковое ребро PB попадают в одну и ту же точку ребра PB. Угол между такими перпендикулярами не зависит в правильной пирамиде от выбора ребра, на которое мы проводим эти перпендикуляры. Но такой угол является линейным углом двугранного угла при боковом ребре. Отсюда и следует, что все эти углы равны между собой.

22.2. а) Сначала опишем окружность около основания пирамиды и рассмотрим конус, вершина которого является вершиной пирамиды, а основанием — проведенная окружность. Около этого конуса можно описать сферу (согласно задаче 21.2). Эта же сфера будет описанной около данной пирамиды.

б) Задача решается аналогично задаче «а».

22.3. Пусть PQ — высота правильной пирамиды, проведенная из вершины P, AB — ребро ее основания. В правильной пирамиде известен также угол AQB. а) Из треугольника APB найдем PA, из треугольника AQB найдем QA. Затем находим высоту.

б) Опишем около данной пирамиды конус. Сфера, описанная около пирамиды, будет сферой, описанной около этого конуса. Далее можно воспользоваться результатами, полученными в задаче 21.7в.

в) Пусть точка K — середина ребра AB. Проведем QK и PK. Искомый радиус находится из треугольника KQP. Центр вписанной сферы лежит на катете PQ этого треугольника и равноудален от сторон QK и PK.

е) Пусть AB и BC — два соседних ребра основания правильной пирамиды. Перпендикуляры из точек A и C на боковое ребро PB попадают в одну и ту же точку L ребра PB. Искомый угол можно найти из треугольника ALC.

22.4. Эта задача сводится к предыдущей, если найти плоский угол при вершине.

22.7. д) Такое сечение в общем случае является параллелограммом. Стороны и диагонали этого параллелограмма, а затем и площадь вычисляются из условия.

Задача к § 24

24.2. В сечении правильного тетраэдра можно получить правильные треугольник и четырехугольник. В сечении куба можно получить правильные треугольник, четырехугольник и шестиугольник. Правильный шестиугольник можно получить также в сечении правильного октаэдра и правильного додекаэдра.

Задачи к главе IV

IV.4. 2) г) Сечение может быть отрезком, равнобедренным треугольником, в том числе прямоугольным, равнобокой трапецией, прямоугольником.

3) в) Можно заметить, что данная призма является «половинкой» куба с единичными ребрами. Тогда искомое расстояние равно $\frac{1}{3}$ диагонали такого куба.

4) е) Этот угол проще искать как угол между нормалями к этим плоскостям, т. е. между A_1B и BC_1.

5) Плоскость многоугольного сечения, которое проходит через AC под углом $60°$ к основанию, пересекает прямую BB_1. Чтобы установить форму этого сечения, надо установить, пересекает эта плоскость ребро BB_1 или его продолжение. Для этого достаточно сравнить величину угла BKB_1 (где точка K — середина AC) с углом $60°$. Тангенс этого угла равен $\sqrt{2}$, т. е. меньше чем $\sqrt{3} = \operatorname{tg} 60°$. Значит, плоскость сечения не пересекает ребро BB_1. Но тогда такое сечение представляет собой трапецию.

7) Опишем сферу около куба, частью которого является данная призма. На этой сфере будут лежать все вершины куба, а значит, и все вершины данной призмы. Радиус сферы, описанной около данной призмы, можно найти как радиус сферы, описанной около этого куба. Диаметр сферы, вписанной в данную призму, необходимо равен расстоянию между ее основаниями, т. е. 1. Он же необходимо равен диаметру окружности, вписанной в перпендикулярное сечение призмы, каковым является ее основание. Очевидно, что диаметр такой окружности меньше 1. Следовательно, в данную призму нельзя вписать сферу.

IV.5. 3) б) Данный тетраэдр является частью куба с ребром 1, «уголком» этого куба. Поэтому расстояние от точки B до плоскости (PAC) равно $\frac{1}{3}$ диагонали куба с ребром 1.

3) в) Общим перпендикуляром прямых PB и AC является отрезок BK — высота из вершины B в треугольнике ABC.

4) г) Пусть PBK и CBL — плоскости симметрии тетраэдра (K — середина AC, L — середина PA). Угол между этими плоскостями вычислим как угол между их нормалями. Нормалью к плоскости PBK будет прямая AC, нормалью к плоскости CBL будет прямая PA. Угол между этими прямыми, а следовательно, угол между этими плоскостями равен $60°$.

7)* Радиус сферы, описанной около данного тетраэдра, тот же самый, что и радиус сферы, описанной около куба, «уголком» которого является данный тетраэдр. А радиус сферы, описанной около этого куба, равен половине его диагонали. Перейдем к вписанной сфере. Пусть ее центр — точка O. Эта точка равноудалена от всех граней пирамиды. Если провести из нее перпендикуляры на грани PAB, PCB, ABC данной пирамиды, то можно рассмотреть куб, все вершины которого, кроме O, лежат на гранях данной пирамиды, причем BO — его диагональ. Если обозначить радиус r, то $BO = r\sqrt{3}$. Пусть прямая BO пересекает плоскость PAC в точке M. Длина отрезка BM — это расстояние от точки B до грани PAC, мы его вычислили в пункте 3б. Оно равно $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Поэтому $OM = BM - BO = \frac{\sqrt{3}}{3} - r\sqrt{3}$. Но расстояние OM является и радиусом вписанной сферы. В результате получаем уравнение $r = \frac{\sqrt{3}}{3} - r\sqrt{3}$, решением которого и является радиус вписанной сферы. Заметим, что этот же результат можно получить и несколько позже, после прохождения объемов, по формуле $r = 3V/S$, где r — радиус вписанной сферы, V — объем пирамиды, S — площадь ее поверхности.

IV.6. 3) г)* Данную пирамиду можно рассматривать как часть единичного куба (куба с ребром 1) $ABCDA_1PC_1D_1$. Далее, пристроим к этому кубу еще один такой же куб с основанием $ABCD$. Продлим сечение PAC первого куба во второй. Расстояние от точки D до плоскости PAC будет равно $\frac{1}{3}$ длины диагонали пристроенного куба, а так как он равен данному, то $\frac{1}{3}$ диагонали первого куба, т. е. $\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \sqrt{3}$.

3) д)* Опять будем рассматривать данную пирамиду как часть куба $ABCDA_1PC_1D_1$. Грань PCD пирамиды в этом кубе даст диагональное сечение $PCDA_1$. Расстояние от A до плоскости сечения будет равно перпендикуляру из точки A на эту плоскость, т. е. половине диагонали грани AA_1D_1D этого куба.

4) в) Интереснее всего искать угол между гранями PCD и PAD. Рассматривая их как части диагональных сечений

$PCDA_1$ и $DAPC_1$ куба $ABCDA_1PC_1D_1$, вычислим этот угол как угол между нормалями к этим плоскостям, каковыми являются прямые BA_1 и BC_1. Этот угол равен $60°$.

5) Следует рассмотреть два случая: когда сечение пересекает прямую PB или когда оно пересекает прямую PD.

7) Опять же рассмотрим данную пирамиду как часть куба $ABCDA_1PC_1D_1$. Сфера, описанная около этого куба, является сферой, описанной около данной пирамиды. Возможность вписания сферы в такую пирамиду интересно проиллюстрировать соображениями весьма наглядными. Сначала рассмотрим маленькую сферу, которая касается трех попарно перпендикулярных граней пирамиды, как бы «загоним ее в угол», где сходятся три прямых угла. А потом начнем равномерно ее «раздувать», т. е. увеличивать в радиусе. В тот момент, когда она коснется грани PAD, она (из соображений симметрии) коснется и грани PCD. Радиус такой сферы проще находить с помощью формулы, использующей объем, указанной в предыдущей задаче.

Возможен и «лобовой», но более трудоемкий путь решения с использованием биссекторов двугранных углов данной пирамиды.

IV.7. 3) а) Это расстояние равно высоте, проведенной из точки C в треугольнике BCD.

3) б, в) Прямая BC параллельна прямой AD, поэтому она параллельна плоскости ACD. Но тогда расстояние до плоскости ACD от точки C и от прямой BC одно и то же. Проще всего его найти из треугольника PKL, где точка K — середина BC, а точка L — середина AD. Оно будет равно высоте треугольника KPL, проведенной из вершины K.

4) г) Этим углом будет угол LPK. Найти его можно из треугольника LPK. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть прямую пересечения плоскостей APD и BPC. Она будет проходить через точку P и параллельна прямым BC и AD. Тогда угол LPK будет линейным углом двугранного угла, заданного плоскостями APD и BPC.

4) д) Искомый угол можно найти из такого равенства: $\cos(\angle PA,\ BD) = \cos\angle PAD\ \cos\angle BDA$.

5) Сначала надо убедиться в том, что такое сечение является трапецией.

6) д) Данная пирамида является частью прямой треугольной призмы $ABTDCN$. Боковые ребра этой призмы — AD, BC и TN. При этом прямая TN является прямой пересечения плоскостей APD и BPC, а треугольники ABT и DCN — основания призмы — лежат в плоскостях, перпендикулярных AD. Внутри отрезка PN возьмем точку R и проведем через нее перпендикулярное сечение призмы RKL. Это сечение параллельно PQ и CD, т. е. отвечает условию задачи. Пирамиду $PABCD$ это сечение будет пересекать по трапеции KK_1L_1L

(K лежит на AD, K_1 лежит на PD, L лежит на BC, L_1 лежит на PC). Сечение KK_1L_1L составляет часть от перпендикулярного сечения призмы RKL, поэтому его площадь меньше площади перпендикулярного сечения при любом положении точки R на отрезке PN. Из этого следует, что наибольшая площадь такого сечения достигается, когда перпендикулярное сечение проходит через точку P, а наименьшее значение (равное 0) достигается, когда перпендикулярное сечение проходит через точку N.

Строго говоря, оба этих экстремальных по площади сечения не параллельны прямым PQ и CD, а содержат их. Если встать на эту точку зрения, то такое сечение пирамиды не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значения.

7) Опишем около данной пирамиды прямой круговой конус с вершиной P и высотой PQ. Сфера, описанная около этого конуса, и будет сферой, описанной около данной пирамиды. Радиус искомой сферы будет равен радиусу сферы, описанной около этого конуса. Необходимые вычисления можно провести, используя результаты задачи 21.7.

Вписать в данную пирамиду сферу невозможно. В самом деле, из соображений симметрии ясно, что центр вписанной сферы должен лежать на высоте пирамиды. Однако, какую бы мы ни взяли точку на высоте пирамиды, расстояние от нее до плоскости PCD не будет равно расстоянию от нее до плоскости PAD. Чтобы в этом убедиться, достаточно сравнить расстояния до этих плоскостей от точки Q. Для других точек высоты используем подобие.

IV.8. Рассмотрим диагональное сечение AA_1C_1C параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Оно представляет собой параллелограмм. Диагональ AC_1 параллелепипеда является одновременно диагональю этого параллелограмма. Пусть точка F — середина AC, точка F_1 — середина A_1C_1. В параллелограмме AA_1C_1C проведем отрезки A_1F и CF_1. Исходная задача свелась к известной планиметрической задаче: доказать, что отрезки A_1F и CF_1 делят диагональ AC_1 на три равных отрезка, а сами делятся этой диагональю в отношении $2:1$, считая от вершины параллелограмма.

Задачи к § 26

26.3. Теоретически можно делить только основание, можно делить только высоту, можно делить и то и другое. На практике же делят только основание. Но тогда задача сводится к планиметрической — деление круга на равновеликие части.

26.4. Если «разделить» — это провести некоторую плоскость сечения, то нет. Если же «разделить» имеет другой смысл, то вполне возможно. Например, из цилиндра вполне можно вырезать прямоугольный параллелепипед, объем которого равен половине объема цилиндра.

26.5. а) Наклоним сосуд так, чтобы жидкость доходила до его края, и посмотрим, покажется дно или нет. Если оно не показалось, то налито больше половины; если показался самый краешек дна, то ровно половина; если показался не только краешек дна, то налито меньше половины. Разумеется, если дно показалось раньше того момента, когда жидкость дошла до края, то налито также меньше половины. Все это можно проиллюстрировать на прямоугольнике — осевом сечении цилиндра, рисуя его в разных положениях над горизонтальной плоскостью.

26.7. Ответы: а) $0 < V \leqslant \frac{16\sqrt{2}\pi}{27}$; б) $0 < V \leqslant \frac{16\pi}{3\sqrt{3}}$.

26.11. Слово «разделить» понимается как «провести одну плоскость так, чтобы получилось сечение». Для решения каждой из этих задач достаточно провести сечение указанного многогранника через центр его симметрии.

26.13. в) Указание. Третий угол треугольника равен $75°$, а потому наибольшей его стороной является сторона, равная 1.

Задачи к § 27

27.2. б) Пусть KK_1 — средняя линия прямоугольника BCC_1B_1, соединяющая середины сторон BC и B_1C_1. Тогда $BC \perp KK_1$. Кроме того, $BC \perp AK$. Поэтому прямая BC перпендикулярна плоскости KK_1A_1A. Следовательно, перпендикулярны плоскости ABC и KK_1A_1A, поэтому если из точки K_1 провести перпендикуляр K_1L на прямую AK, то он будет и перпендикуляром к плоскости ABC, а значит, высотой призмы. Ее легко найти из прямоугольного треугольника KLK_1, в котором известны гипотенуза KK_1 и угол K_1KL — линейный угол данного двугранного угла.

27.4. а) Луч AA_1 составляет равные острые углы с лучами AB и AD плоскости ABC. Следовательно, он проектируется на биссектрису угла BAD. Далее воспользуемся формулой $\cos\angle A_1AD = \cos\angle A_1AK \cos\angle KAD$. Из нее можно найти $\cos\angle A_1AK$. Зная $\cos\angle A_1AK$, можно найти $\sin\angle A_1AK$, а затем из прямоугольного треугольника A_1AK найти высоту A_1K.

б) Это тот же самый параллелепипед, что и в задаче «а», но только надо переобозначить его основания. Верхнее основание $A_1B_1C_1D_1$ параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ обозначим соответственно $ABCD$, а нижнее основание $ABCD$ этого параллелепипеда обозначим соответственно $A_1B_1C_1D_1$. Поэтому решение задачи «б» сводится к решению задачи «а».

27.5. Будем считать, что в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ квадратами являются основания $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, а также боковые грани AA_1B_1B и DD_1C_1C. Тогда прямая AB перпендикулярна плоскости AA_1D_1D, а потому плоскости $ABCD$ и AA_1D_1D перпендикулярны. Перпендикуляр A_1K из точки A_1 на прямую AB будет поэтому перпендикуляром и к плоскости $ABCD$, а потому является высотой параллелепипеда. Ясно, что отрезок A_1K, являясь перпендикуляром к плоскости, не больше отрезка AA_1, который является, вообще говоря, наклонной к этой плоскости. Поэтому наибольшее значение перпендикуляра AK к плоскости равняется AA_1, т. е. тогда, когда его длина равна длине ребра AA_1, т. е. 1. Следовательно, наибольшее значение его объема достигается тогда, когда боковое ребро параллелепипеда становится перпендикулярным к основанию.

Этот результат можно предвосхитить из наглядных соображений, вращая плоскость AA_1B_1B вокруг прямой AB. «Видно», что высота параллелепипеда будет наибольшей, когда плоскости AA_1B_1B и $ABCD$ будут перпендикулярны.

27.6. Пусть S_0 — площадь основания призмы, H — ее высота. Уже известно, что площадь любого многоугольника равна площади его многоугольной проекции на любую плоскость, деленной на косинус угла между плоскостью данного многоугольника и плоскостью проекций. Запишем это равенство в виде формулы $S_0 = S_1 / \cos\varphi$, где φ — угол между плоскостями. Но угол между плоскостями равен углу между нормалями к этим плоскостям. Нормалью к основанию призмы является ее высота. Нормалью к перпендикулярному сечению призмы является боковое ребро. Поэтому верно равенство $L = H / \cos\varphi$. Из этих двух равенств получаем пропорцию $S_1 / S_0 = H / L$. Так как $S_0H = V$, то приходим к тому, что требуется доказать: $V = S_1L$.

27.13. Задача сводится к задаче 27.8.

27.17. Разберем задачу «г» для треугольной пирамиды. Высота этой пирамиды находится из прямоугольного треугольника PAQ, где P — вершина пирамиды, Q — ее проекция на плоскость основания, A — одна из вершин основания пирамиды. Катет AQ треугольника PAQ является радиусом окружности, описанной около основания пирамиды. Отсюда находится сторона основания пирамиды.

27.18. Наметим план решения в задаче «б» для правильной треугольной усеченной пирамиды. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная усеченная треугольная пирамида, являющаяся частью правильной треугольной пирамиды $PABC$. Тогда объем данной усеченной пирамиды равен разности объемов двух правильных треугольных пирамид $PABC$ и $PA_1B_1C_1$. Так как стороны оснований этих пирамид известны, то и площади их оснований можно найти. Осталось найти их высоты. Это можно сделать, если рассмотреть треугольник PAQ, где точка Q — центр большего основания пирамиды, и треугольник PA_1Q_1, где точка Q_1 — центр меньшего основания пирамиды.

Отрезок QQ_1 можно найти как высоту прямоугольной трапеции AA_1Q_1Q обычным способом. Отрезок PQ_1 можно найти, рассмотрев подобные треугольники PAQ и PAQ_1. Тем самым закончен план решения задачи.

27.20. а) Пусть в тетраэдре $ABCD$ $AB = BC = CA = AD = CD = 1$. Примем за его основание грань ABC. Так как все ребра основания известны, то объем определяется только значением переменной высоты, проведенной из вершины D на плоскость ABC. Когда же она является наибольшей? Будем мысленно вращать грань ADC вокруг AC. Высота, проведенная из точки D, будет наибольшей, когда точка D будет более всего удалена от плоскости основания. И произойдет это в тот момент, когда грань ACD станет перпендикулярной основанию. Дальнейшие вычисления очевидны. Полученный нами из наглядных соображений результат о наибольшем значении высоты можно при желании формализовать. Для этого достаточно записать равенство $DQ = DK \sin \angle DKQ$, где точка Q — центр основания, а точка K — середина ребра AC. Отсюда видно, что наибольшее значение высоты DQ достигается при угле DKQ, равном $90°$.

б) Пусть в тетраэдре $ABCD$ $AB = BC = CA = AD = 1$. Примем за его основание грань ABC. Так как все ребра основания известны, то объем определяется только значением переменной высоты, проведенной из вершины D на плоскость ABC. Когда же она является наибольшей? Очевидно, тогда, когда ребро AD будет перпендикулярно основанию, ведь высота не больше этого ребра и равна ему как раз в таком положении.

27.21. Пусть DA, DB, DC — боковые ребра правильной треугольной пирамиды. Примем за ее основание грань ADC, тогда точка B будет ее вершиной. Наибольшую площадь основание будет иметь тогда, когда ребра DA и DC будут взаимно перпендикулярны. Высота, проведенная из вершины B, будет наибольшей, когда ребро BD будет перпендикулярно плоскости ADC, т. е. ребрам DA и DC. Все эти условия выполняются одновременно при взаимной попарной перпендикулярности ребер DA, DC и DB. В такой пирамиде достигается наибольший объем. Ясно, что наименьшего объема у такой пирамиды нет, ибо он может быть сколь угодно близок к нулю: для этого достаточно сделать угол между данными ребрами сколь угодно малым.

27.22. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр. Примем грань ABC за его основание. Так как все ребра тетраэдра можно измерить, то площадь основания ABC можно найти по формуле Герона. Проблема в том, чтобы найти его высоту DQ. Для ее нахождения проделаем следующее. Проведем высоту DK из точки D на ребро AC. (Для простоты предполагаем, что точка K оказалась внутри AC.) После чего в грани ABC

из точки K проведем луч, перпендикулярный AC. Известно, что точка D будет проектироваться на этот луч. Теперь повторим построение, но проведя высоту из точки D к ребру BC, а затем проведем в грани ABC луч, перпендикулярный BC. (Для простоты предполагаем, что точка L оказалась внутри BC.) Точка D будет проектироваться и на этот луч. Таким образом, точка Q — проекция точки D на плоскость ABC — может быть найдена как точка пересечения двух лучей, построенных в грани ABC. Тем самым мы фиксируем и высоту DQ, проведенную из вершины D на грань ABC. При этом отрезки QK и QL можно измерить непосредственно на грани ABC. Саму эту высоту можно вычислить по теореме Пифагора хотя бы из прямоугольного треугольника DKQ.

27.25. Проще всего провести диагональ основания. Данная четырехугольная пирамида разобьется при этом на две треугольные пирамиды. Объем каждой из них мы можем найти согласно задаче 27.22.

27.26. Задача сводится к задаче 27.18.

27.28. а) Соединим центр симметрии параллелепипеда со всеми его вершинами. Получим шесть пирамид. Объем каждой из них составляет $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда.

б) Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный параллелепипед. Соединим его вершину D_1 с вершинами A, B, C, B_1. Получим три четырехугольные пирамиды с основаниями $ABCD$, ABB_1A_1, BCC_1B_1. Объем каждой из них составляет $\frac{1}{3}$ от объема параллелепипеда.

27.29. Напротив каждой грани этого тетраэдра находится вершина данного параллелепипеда, которую мы будем считать и вершиной тетраэдра. Таких тетраэдров — по числу граней — 4. Объем каждого из них составляет $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, их суммарный объем дает $\frac{2}{3}$ объема параллелепипеда. Вместе с данным тетраэдром они дают в сумме объем всего параллелепипеда. Поэтому объем данного тетраэдра составляет $\frac{1}{3}$ от объема параллелепипеда.

27.33. Указание. В задаче можно не учитывать толщину корки.

27.35. б) Наибольший шар в данном теле необязательно вписанный, ибо вписать шар можно не во всякое тело. Но вписанный шар всегда наибольший. Для прямоугольного параллелепипеда задача решается так. Объем шара определяется его радиусом. Наибольшему объему соответствует наибольший радиус. Наибольший радиус соответствует наибольшему диаметру. А наибольший диаметр шара, находящегося в параллелепипеде, определяется наименьшим расстоянием между плоскостями его граней.

г) Надо сравнить половину расстояния между основаниями призмы с радиусом окружности, вписанной в основание. Наименьшая из этих величин и даст радиус наибольшего шара, который можно расположить в данной призме.

Задачи к § 28

28.1. б) Докажем это утверждение на примере треугольной призмы — в общем случае доказательство аналогично. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — треугольная призма, KLM — ее перпендикулярное сечение, при этом точка K лежит на прямой AA_1, точка L лежит на прямой BB_1, точка M лежит на прямой CC_1. Площадь боковой поверхности такой призмы равна сумме площадей трех параллелограммов, являющихся ее боковыми гранями. Площадь параллелограмма AA_1B_1B равна произведению бокового ребра призмы на его высоту KL. Площадь параллелограмма AA_1C_1C равна произведению бокового ребра призмы на его высоту KM. Площадь параллелограмма BB_1C_1C равна произведению бокового ребра призмы на его высоту LM. Сложив эти три слагаемых площади и вынеся длину бокового ребра за скобку, мы увидим, что в скобках остается сумма трех сторон перпендикулярного сечения, т. е. его периметр.

28.2. б) Проведем плоскость, касательную к данной сфере с центром O, и пусть точка A — точка касания. Рассмотрим теперь любую большую окружность данной сферы, проходящую через точку A. Плоскость этой окружности пересекает касательную плоскость по некоторой прямой — назовем ее p. На прямой p от точки A отложим отрезок AB, больший радиуса данной сферы. Из точки B проведем еще одну касательную к этой большой окружности, и пусть точка C — точка пересечения этой касательной и прямой OA. Точка C будет вершиной нужной нам пирамиды. Основание ее можно восстановить, так как известна точка B — середина одной из сторон основания (любого по форме правильного многоугольника) и известен радиус окружности, вписанной в него, — отрезок AB.

28.3. б) Интересно такое решение. Будем двигать точку по высоте пирамиды от вершины к основанию. Когда она достаточно близка к вершине, расстояние от нее до боковой грани меньше, чем расстояние от нее до основания. Когда она достаточно близка к основанию, расстояние от нее до боковой грани больше, чем расстояние от нее до основания. Значит, в каком-то положении эти расстояния будут равны.

Здесь и будет находиться точка, равноудаленная от всех ее граней, т. е. центр вписанной сферы.

28.6. г) Такое сечение образовано тремя диагоналями граней куба, а потому представляет собой равносторонний треугольник.

28.11. Для решения задачи полезно воспользоваться соображениями подобия и рассматривать усеченную пирамиду как разность двух подобных пирамид. Одна из этих пирамид имеет основанием большее основание усеченной пирамиды, а другая пирамида имеет основанием меньшее основание усеченной пирамиды. Коэффициент подобия равен отношению сторон основания. После этого достаточно найти площадь поверхности большей пирамиды.

28.19. В этой задаче необходимо предположение о том, что слой краски «не имеет толщины».

28.22. При решении этой задачи следует воспользоваться утверждением о том, что равные части сферы имеют равные площади поверхностей. Доказывать эти равенства можно из симметрии сферы. Кроме того, при решении задачи используется аддитивность площади поверхности: если сфера разбита на части, ограниченные дугами больших окружностей, то сумма площадей этих частей равна площади самой сферы.

28.27. Площадь поверхности (и объем) данного тела можно найти следующим образом. Мысленно раздвинем тела, из которых состоит данное тело. Они равны, и каждое из них имеет одним основанием круг, а другим — эллипс. Вместо одного из них возьмем другое, равное ему (и первому телу), но такое, чтобы оно после совмещения его с первым телом равными эллипсами давало прямой круговой цилиндр. После этого легко найти нужные величины.

Можно решать иначе. Данное тело можно рассматривать как объединение трех тел: двух равных прямых круговых цилиндров и тела, представляющего собой объединение двух равных «полуцилиндров».

Прежде чем решать эту задачу, полезно решить аналогичную задачу на плоскости для двух частей прямоугольников, составленных подобным образом. Эти части прямоугольников можно рассматривать как части осевых сечений исходных цилиндров.

28.37. Имеет смысл рассматривать данный усеченный конус как разность двух конусов «большого» и «малого». Эти конусы подобны, а отношение их площадей поверхностей равно квадрату коэффициента подобия, который равен отношению их радиусов. После чего достаточно найти площадь поверхности большего конуса.

28.39. 1) г)* Следует рассмотреть разные случаи расположения оси вращения относительно треугольника. Она может не иметь с ним общих точек (два случая), иметь с ним общую точку — вершину треугольника, пересекать данный треугольник по отрезку, отличному от стороны, или по самой стороне (в последнем случае нарушено определение параллельности, но его можно рассмотреть для общности). Наиболее сложный случай — когда ось вращения пересекает треугольник по отрезку, отличному от стороны. При решении задачи в этом случае можно ограничиться ситуацией, когда искомая поверхность тела вращения представляет собой объединение боковых поверхностей цилиндра и двух конусов. В других случаях возникает некоторая проблема выяснения того, является ли полученная конфигурация телом.

6) в) Наиболее простой случай получается, когда боковые стороны трапеции перпендикулярны. Можно также разобрать случай, когда поверхность тела вращения состоит из боковых поверхностей усеченного конуса и двух конусов. В других случаях возникает некоторая проблема выяснения того, является ли полученная конфигурация телом.

Задачи к главе V

V.1. Пусть данная призма $ABCA_1B_1C_1$. Обозначим $AB = x$, $BB_1 = y$. Объем призмы выразится формулой $V = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2y$. Согласно условию задачи $x + y = 3$. Целевую функцию можно записать как $\widetilde{V} = x^2(3 - x)$, где $0 < x < 3$. Проделав обычное исследование на поиски наибольшего значения, видим, что оно достигается при $x = 2$. Ответ: $V = \sqrt{3}$.

V.2. Пусть данная призма $ABCA_1B_1C_1$. Обозначим $AB = x$, $BB_1 = y$. Объем призмы выразится формулой $V = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2y$. Из геометрических соображений (теорема Пифагора) получаем $x^2 + 3y^2 = 9$. Целевую функцию можно записать как $\widetilde{V} = (9 - 3y^2)y$, где $0 < y < \sqrt{3}$. Проделав обычное исследование на поиски наибольшего значения, видим, что оно достигается при $y = 1$. Ответ: высота равна 1.

V.3. Пусть данный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Обозначим $AB = x$, $BC = y$, $BB_1 = x$. Объем параллелепипеда выразится формулой $V = x^2y$. Согласно условию задачи $x + y = 3$. Целевую функцию $\widetilde{V}$ можно записать как $\widetilde{V} = x^2(3 - x)$, где $0 < x < 3$. Проделав обычное исследование на поиски наибольшего значения, видим, что оно достигается при $x = 2$. Ответ: $V = 4$.

V.4. Пусть данная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Обозначим $AB = AD = x$, $BB_1 = y$. Объем призмы выразится формулой $V = x^2y$. Согласно условию задачи $x\sqrt{2} + y = 3$. Целевую функцию $\widetilde{V}$ можно записать как $\widetilde{V} = x^2(3 - x\sqrt{2})$, где $0 < x < \frac{3}{\sqrt{2}}$. Проделав обычное исследование на поиски наибольшего значения, видим, что оно достигается при $x = \sqrt{2}$. Ответ: $V = 16$.

V.5. Пусть данная пирамида $PABC$. Обозначим $AC = x$, $BC = y$. Объем пирамиды выразится формулой $V = \frac{\sqrt{3}}{18}x^2y$. Согласно условию задачи $x + y = 18$. Целевую функцию $\widetilde{V}$ можно записать как $\widetilde{V} = x^2(18 - x)$, где $0 < x < 18$. Проделав обычное исследование на поиски наибольшего значения, видим, что оно достигается при $x = 12$. Ответ: $V = 48\sqrt{3}$.

V.6. 1) Пусть x — радиус основания цилиндра, y — его высота. Объем цилиндра выразится формулой $V = \pi x^2 y$. Из геометрических соображений (подобие треугольников) $\frac{x}{R} + \frac{y}{H} = 1$. Целевую функцию $\widetilde{V}$ можно записать как $\widetilde{V} = x^2(R - x)$, где $0 < x < R$. Проделав обычное исследование на поиски наибольшего значения, видим, что оно достигается при $x = \frac{2R}{3}$. Ответ: $V = \frac{4\pi R^2 H}{27}$.

2) Поскольку в учебнике формулировка этой задачи содержит неточность, ее следует решать в той редакции, которая приведена ниже.

2) а) Пусть x — сторона основания призмы, y — ее высота. Объем призмы выразится формулой $V = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2y$. Из геометрических соображений (подобие треугольников) $\frac{x}{R\sqrt{3}} + \frac{y}{H} = 1$. Целевую функцию $\widetilde{V}$ можно записать как $\widetilde{V} = x^2(R\sqrt{3} - x)$, где $0 < x < R\sqrt{3}$. Проделав обычное исследование на поиски наибольшего значения, видим, что оно достигается при $x = = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$. Ответ: $V = \frac{\sqrt{3}R^2H}{9}$.

2) б) Пусть x — сторона основания призмы, y — ее высота. Объем призмы выразится формулой $V = x^2y$. Из геометрических соображений (подобие треугольников) $\frac{x}{R\sqrt{2}} + \frac{y}{H} = 1$.

Целевую функцию $\widetilde{V}$ можно записать как $\widetilde{V} = x^2(R\sqrt{2} - x)$, где $0 < x < R\sqrt{2}$. Проделав обычное исследование на поиски наибольшего значения, видим, что оно достигается при $x = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$. Ответ: $V = \frac{8R^2H}{27}$.

V.7. 1) Пусть x — радиус основания цилиндра, y — его высота. Объем цилиндра выразится формулой $V=\pi x^2 y$. Из геометрических соображений (теорема Пифагора) $4x^2+y^2=4R^2$. Целевую функцию $\widetilde{V}$ можно записать как $\widetilde{V}=$ $=y\left(R^2-\frac{y^2}{4}\right)$, где $0<y<2R$. Проделав обычное исследование на поиски наибольшего значения, видим, что оно достигается при $y=\frac{2R}{\sqrt{3}}$. Ответ: $V=\frac{4\pi\sqrt{3}R^3}{9}$.

2) Поскольку в учебнике формулировка этой задачи содержит неточность, ее следует решать в той редакции, которая приведена ниже.

2) а) Пусть x — радиус основания конуса, y — его высота. Объем конуса выразится формулой $V=\frac{\pi x^2 y}{3}$. Из геометрических соображений (метрические соотношения в прямоугольном треугольнике, в котором гипотенузой является диаметр сферы) $x^2=y(2R-y)$. Целевую функцию $\widetilde{V}$ можно записать как $\widetilde{V}=y^2(2R-y)$, где $0<y<2R$. Проделав обычное исследование на поиски наибольшего значения, видим, что оно достигается при $y=\frac{4R}{3}$. Ответ: $V=\frac{32\pi R^3}{81}$.

2) б) Пусть x — сторона основания призмы, y — ее высота. Объем призмы выразится формулой $V=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 y$. Из геометрических соображений (теорема Пифагора) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=R^2$. Целевую функцию $\widetilde{V}$ можно записать как $\widetilde{V}=y\left(R^2-\frac{y^2}{4}\right)$, где $0<y<2R$. Проделав обычное исследование на поиски наибольшего значения, видим, что оно достигается при $y=$ $=\frac{2R\sqrt{3}}{3}$. Ответ: $V=R^3$.

2) в) Пусть x — сторона основания призмы, y — ее высота. Объем призмы выразится формулой $V=x^2 y$. Из геометрических соображений (теорема Пифагора) $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=R^2$. Целевую функцию $\widetilde{V}$ можно записать как $\widetilde{V}=y(4R^2-y^2)$, где $0<y<2R$. Проделав обычное исследование на поиски наибольшего значения, видим, что оно достигается при $y=\frac{2R\sqrt{3}}{3}$. Ответ: $V=\frac{8R^3\sqrt{3}}{9}$.

2) г) Пусть x — сторона основания пирамиды, y — ее высота. Объем призмы выразится формулой $V = \frac{\sqrt{3}}{12} x^2 y$. Из геометрических соображений (метрические соотношения в прямоугольном треугольнике, в котором гипотенузой является диаметр сферы) $x^2 = 3y(2R - y)$. Целевую функцию $\widetilde{V}$ можно записать как $\widetilde{V} = y^2(2R - y)$, где $0 < y < 2R$. Проделав обычное исследование на поиски наибольшего значения, видим, что оно достигается при $y = \frac{4R}{3}$. Ответ: $V = \frac{8\sqrt{3}R^3}{27}$.

2) д) Пусть x — сторона основания пирамиды, y — ее высота. Объем призмы выразится формулой $V = \frac{x^2 y}{3}$. Из геометрических соображений (метрические соотношения в прямоугольном треугольнике, в котором гипотенузой является диаметр сферы) $x^2 = 2y(2R - y)$. Целевую функцию $\widetilde{V}$ можно записать как $\widetilde{V} = y^2(2R - y)$, где $0 < y < 2R$. Проделав обычное исследование на поиски наибольшего значения, видим, что оно достигается при $y = \frac{4R}{3}$. Ответ: $V = \frac{64R^3}{81}$.

V.8. Пусть x — радиус основания конуса, y — образующая его поверхности. Объем конуса выразится формулой $V = \frac{\pi x^2 \sqrt{y^2 - x^2}}{3}$. Согласно условию задачи $x + y = 10$. Чтобы получить более простую целевую функцию, рассмотрим квадрат объема. Это возможно потому, что экстремальные значения неотрицательной функции и ее квадрата достигаются при одних и тех же значениях переменной. В результате после очевидных выкладок целевую функцию $\widetilde{V}$ можно записать как $\widetilde{V} = x^4(5 - x)$, где $0 < x < 5$. Проделав обычное исследование на поиски наибольшего значения, видим, что оно достигается при $x = 4$. Ответ: радиус равен 4.

V.9. Пусть x — радиус основания конуса, y — его высота. Объем конуса выразится формулой $V = \frac{\pi x^2 y}{3}$. Согласно условию задачи $x + y = 1$. Целевая функция $\widetilde{V}$ такова: $\widetilde{V} = x^2(1 - x)$, где $0 < x < 1$. Проделав обычное исследование на поиски наибольшего значения, видим, что оно достигается при $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$. Ответ: радиус основания конуса равен $\frac{2}{3}$, высота равна $\frac{1}{3}$.

V.10. Пусть x — сторона основания пирамиды, y — ее высота. Объем пирамиды выразится формулой $V=\frac{\sqrt{3}}{12}x^2y$. Из геометрических соображений (теорема Пифагора) $\frac{x^2}{12}+y^2=12$. Целевую функцию $\widetilde{V}$ можно записать как $\widetilde{V}=y(12-y^2)$, где $0<y<2\sqrt{3}$. Проделав обычное исследование на поиски наибольшего значения, видим, что оно достигается при $y=2$. Ответ: $V=16\sqrt{3}$.

V.11. Пусть x — сторона AB основания пирамиды, y — ее высота PB. Объем пирамиды выразится формулой $V=\frac{xy^2}{3}$. Из условия задачи $x+y=9$. Целевую функцию $\widetilde{V}$ можно записать как $\widetilde{V}=y^2(9-y)$, где $0<y<9$. Проделав обычное исследование на поиски наибольшего значения, видим, что оно достигается при $y=6$. Ответ: искомое расстояние равно $3\sqrt{5}$.

V.12. Пусть x — сторона AB основания пирамиды, y — ее высота PA. Объем пирамиды выразится формулой $V=\frac{xy^2}{6}$. Из условия задачи $2x+y=12$. Целевую функцию $\widetilde{V}$ можно записать как $\widetilde{V}=x^2(6-x)$, где $0<x<6$. Проделав обычное исследование на поиски наибольшего значения, видим, что оно достигается при $x=4$. Ответ: искомые величины равны 4 и 6.

V.13. Пусть данная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Обозначим $AB=x$, $AA_1=y$. Объем призмы выразится формулой $V=$ $=\sqrt{3}\,x^2y$. Согласно условию задачи $x+y=9$. Целевую функцию $\widetilde{V}$ можно записать как $\widetilde{V}=x^2(9-x)$, где $0<x<9$. Проделав обычное исследование на поиски наибольшего значения, видим, что оно достигается при $x=6$. Ответ: $V=108\sqrt{3}$.

V.14. Пусть x — сторона AC основания пирамиды, y — ее высота PC. Объем пирамиды выразится формулой $V=\frac{x^2y}{6}$. Из условия задачи $3x+y=12$. Целевую функцию $\widetilde{V}$ можно записать как $\widetilde{V}=x^2(3-x)$, где $0<x<3$. Проделав обычное исследование на поиски наибольшего значения, видим, что оно достигается при $x=2$. Ответ: искомая величина равна 2.

V.15. Пусть x — сторона AB основания пирамиды, y — сторона BC основания пирамиды. Объем пирамиды выразится формулой $V=\frac{x^2y}{3}$. Из условия задачи получаем равенство:

$x+y=6$. Целевую функцию $\widetilde{V}$ можно записать как $\widetilde{V}=$ $=x^2(6-x)$, где $0<x<6$. Проделав обычное исследование на поиски наибольшего значения, видим, что оно достигается при $x=4$. Ответ: $V=\frac{32}{3}$.

V.16. Пусть x — высота пирамиды, $y=PC$. Объем пирамиды выразится формулой $V=\frac{(y-x^2)\,x}{3}$. Из условия задачи получаем равенство $x+y=8$. Целевую функцию $\widetilde{V}$ можно записать как

$$\widetilde{V}=x(4-x), \text{ где } 1\leqslant x\leqslant 3.$$

Проделав обычное исследование на поиски наибольшего значения, видим, что оно достигается при $x=2$. Ответ: искомая величина PB равна 2.

V.17. Пусть x — сторона ромба, y — высота пирамиды. Объем пирамиды выразится формулой $V=\frac{x^2y}{6}$. Из условия задачи получаем равенство $2x+y=48$. Целевую функцию $\widetilde{V}$ можно записать как $\widetilde{V}=x^2(24-x)$, где $0<x<24$. Проделав обычное исследование на поиски наибольшего значения, видим, что оно достигается при $x=16$. Ответ: искомые величины равны 16.

V.18. Пусть x — сторона AD, y — сторона AB. Тогда высота пирамиды тоже равна y. Объем пирамиды выразится формулой $V=\frac{x^2y}{3}$. Из условия задачи получаем равенство $x+y=6$. Целевую функцию $\widetilde{V}$ можно записать как $\widetilde{V}=$ $=x(6-x)^2$, где $0<x<6$.

Проделав обычное исследование на поиски наибольшего значения, видим, что оно достигается при $x=2$. Ответ: искомая величина равна 4.

V.19. Пусть x — сторона AD, y — сторона AB. Тогда площадь поверхности S равна $18+x+y$. Согласно условию $xy=9$. Далее можно провести исследование с помощью производной, но проще сделать иначе. Известно, что сумма положительных чисел при постоянном их произведении достигает наименьшего значения, когда они равны. Поэтому наименьшее значение площади поверхности достигается при $x=y=3$. Ответ: 24.

Задачи к § 29

29.4. Пусть основанием правильного тетраэдра $ABCD$ является грань ABC. Для точки C возможны два положения на плоскости xy. Выберем то из них, когда она будет лежать на положительной полуоси y. Ее координаты по осям x и z равны нулю, осталось найти координату по оси y. Ее находим, вычислив высоту в правильном треугольнике ABC. Для вершины D возможны теперь два положения в пространстве — над плоскостью xy и под ней. Выберем случай, когда точка D расположена над плоскостью xy. Ее координата по оси x равна нулю, координата по оси y равна координате ее проекции на плоскость xy, т. е. координате центра треугольника ABC. Осталось найти координату по оси z. Она равна высоте этого тетраэдра. Задача имеет четыре решения.

29.8. б) Для решения задачи следует воспользоваться следующим. Сначала найдем координату центра куба. Затем используем тот факт, что треугольники, о которых идет речь в задаче, равносторонние. Каждая координата центра равностороннего треугольника является средним арифметическим координат его вершин. После этого применяем формулу расстояния между двумя точками.

29.17. Сначала выберем такую систему координат, чтобы центры обеих сфер лежали на оси x, а начало координат лежало посередине между этими центрами. Пусть координаты центра первой сферы будут такими: $(-a, 0, 0)$, а координаты центра второй сферы будут такими: $(a, 0, 0)$. Тогда уравнение первой сферы имеет вид $(x+a)^2+y^2+z^2=R^2$, а уравнение второй сферы имеет вид $(x-a)^2+y^2+z^2=R^2$. Запишем систему двух этих уравнений. Решая ее, увидим, что координата x является постоянной. Отсюда ясно, что множество ее решений находится в плоскости. Подставив найденное значение x в любое из исходных уравнений, получим, что в общем случае имеем дело с окружностью в найденной плоскости.

29.18. Выберем систему координат так, чтобы ось x лежала на пересечении данных плоскостей. Пусть точка K находится в первом октанте (т. е. все ее координаты положительны). Пусть $|K\alpha|=y$, $|K\beta|=z$. Тогда условие задачи перепишем в виде равенства $y+z=1$. Это равенство задает плоскость, параллельную оси x. В первом октанте такая плоскость даст часть полосы между двумя параллельными прямыми, по которым полученная плоскость пересекает координатные плоскости xz и xy. Окончательно получим боковую поверхность бесконечной прямой призмы.

Задачи к § 30

30.8. Легко убедиться в том, что такой точкой является центр симметрии параллелепипеда. Единственность такой точки докажем от противного. Пусть есть точка Y с таким же свойством. Запишем для нее аналогичное равенство, а потом вычтем из первого равенства второе. Получим после упрощений равенство $8\overrightarrow{XY} = \vec{0}$, которое и означает совпадение точек X и Y.

Этот результат верен для любого числа точек A_1, A_2, ..., A_n. Его физический смысл сводится к существованию и единственности центра масс любого числа точек. Искомый центр масс может быть найден так. Обозначим его через T. Выберем произвольную точку O пространства как полюс, т. е. будем откладывать от нее все последующие векторы. Нам надо найти такую точку T, чтобы выполнялось равенство $\sum\limits_1^n \overrightarrow{TA_i} = \vec{0}$. Для каждого вектора $\overrightarrow{TA_i}$ верно соотношение $\overrightarrow{TA_i} = \overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OT}$. Поэтому приходим к равенству $\sum\limits_1^n \overrightarrow{TA_i} = \sum\limits_1^n \overrightarrow{OA_i} - n\overrightarrow{OT}$. И получим, что $\overrightarrow{OT} = \dfrac{\sum\limits_1^n \overrightarrow{OA_i}}{n}$. Тем самым центр масс фиксирован. Действительно, сложим все векторы $\overrightarrow{OA_i}$, затем умножим сумму на $\dfrac{1}{n}$. Осталось только отложить полученный вектор от точки O. Единственность найденного вектора доказывается от противного, так же как и в приведенном решении.

30.12. а) $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AX} = \lambda\overrightarrow{AB}$; где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$; в) $\overrightarrow{AX} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$.

30.13. Запишем два равенства: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1C}$ и $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD_1} + \overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DC}$. Видим, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{B_1C} = \overrightarrow{AD_1}$. И получаем, что $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{D_1D}$. Отсюда и следует нужная нам параллельность.

30.14. Выразим векторы $\overrightarrow{KM}$ и $\overrightarrow{NL}$ через векторы $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{PC}$ и увидим, что они не коллинеарны, т. е. не отличаются на постоянный множитель. Имеем $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PC} - (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AK}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{PC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{PA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{PB} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PB}\right)$.

$\overrightarrow{NL} = \overrightarrow{PL} - \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BL} - \frac{1}{3}\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB}) - \frac{1}{3}\overrightarrow{PA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{PA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB})$.

При желании можно делать выкладки дальше, чтобы убедиться в том, что векторы, заключенные в скобках, не коллинеарны.

30.15. Докажем, что середина K диагонали A_1C лежит на диагонали B_1D. Для этого достаточно доказать, что векторы $\overrightarrow{B_1K}$ и $\overrightarrow{B_1D}$ коллинеарны с соответствующим множителем. Все векторы будем выражать через векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA_1}$.

Имеем $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$.

$$\overrightarrow{BL}=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AB_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB})=$$
$$=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}).$$
$$\overrightarrow{B_1D}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1}.$$

Отсюда видно, что $\overrightarrow{B_1K}=0{,}5\,\overrightarrow{B_1D}$. Оказалось, что точка K является к тому же серединой диагонали B_1D.

Докажем теперь, что центр L треугольника BA_1C_1 также лежит на этой диагонали. Пусть точка M — середина A_1C_1. Тогда $\overrightarrow{BL}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BC_1})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BC_1})$.

Затем $\overrightarrow{B_1L}=\overrightarrow{BL}-\overrightarrow{BB_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BC_1})-\overrightarrow{BB_1}=$
$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC_1}-\overrightarrow{AB})-\overrightarrow{BB_1}=$$
$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})-\overrightarrow{BB_1}=$$
$$=\frac{1}{3}(2\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})-\overrightarrow{AA_1}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=$$
$=\frac{1}{3}(-\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{B_1D}$. То есть B_1L составляет $\frac{1}{3}$ от B_1D.

30.16. Сначала посмотрим, что происходит в начале и в конце движения. В начальный момент времени мы имеем дело с отрезком AD, в конце движения мы имеем дело с отрезком BC. Поэтому будем доказывать, что отрезок XY параллелен плоскости, параллельной прямым AD и BC. Переведя на векторный язык, докажем, что вектор $\overrightarrow{XY}$ является линейной комбинацией векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$. Имеем

$$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{DY}-\overrightarrow{DX}=t\,\overrightarrow{DB}-(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AX})=t\,\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}-t\,\overrightarrow{AC}=$$
$$=t\,\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}-t(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA})=t\,\overrightarrow{DB}-t\,\overrightarrow{DC}+(t-1)\overrightarrow{DA}=$$
$$=t(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC})+(t-1)\overrightarrow{DA}=t\,\overrightarrow{CB}+(t-1)\overrightarrow{DA}.$$

Задачи к § 31

31.10. Найдем координаты векторов, заданных этими точками: $\overrightarrow{AB}=(3,\ 0,\ -3)$; $\overrightarrow{AC}=(3,\ -3,\ 0)$; $\overrightarrow{AD}=(3,\ 1,\ 2)$; $\overrightarrow{BC}=(0,\ -3,\ 3)$; $\overrightarrow{BD}=(0,\ 1,\ 5)$; $\overrightarrow{CD}=(0,\ 4,\ 2)$. Теперь проверим, есть ли среди этих векторов коллинеарные, составляя отношения соответствующих координат этих векторов. Можно увидеть, что необходимой пропорциональности соответствующих координат нет для любой пары данных векторов. Поэтому нет и параллельных прямых.

31.17. Перейдем к радиус-векторной записи векторов, когда все они рассматриваются выходящими из одной точки, в данном случае из точки P. Тогда $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}$. Для простоты обозначим: $\overrightarrow{PA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{PB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{PC}=\vec{c}$. После этого первое условие запишем в виде $(\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{c}=0$, а второе условие запишем так: $(\vec{c}-\vec{a})^2+\overrightarrow{b^2}=\overrightarrow{a^2}+(\vec{c}-\vec{b})^2$. Упрощая второе равенство (возведя в квадрат и приведя подобные), мы приходим к такому: $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$. Легко видеть, что оно равносильно первому условию.

31.18. а) Пусть на плоскости α имеется прямая a, BC — перпендикуляр на эту плоскость из точки B, BA — наклонная на эту плоскость из точки B. Требуется доказать равносильность двух утверждений: $BA\perp a$ и $CA\perp a$. Переведем это на векторный язык: $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{a}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\vec{a}=0$. Здесь $\vec{a}$ — какой-то вектор на прямой a. Запишем очевидное равенство: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$. Теперь перепишем первое векторное равенство в таком виде: $(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})\cdot\vec{a}=0$. Раскрыв скобки, получаем следующее: $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{a}+\overrightarrow{CB}\cdot\vec{a}=0$. Второе слагаемое равно нулю, так как прямая BC перпендикулярна плоскости α. Остается равенство $\overrightarrow{AC}\cdot\vec{a}=0$. Оно соответствует второй указанной перпендикулярности. Итак, из первого условия перпендикулярности мы можем получить второе. Действуя в обратном порядке, мы из второго условия перпендикулярности получим первое. Тем самым мы доказали равносильность двух утверждений, составляющих теорему о трех перпендикулярах.

б) Пусть на плоскости α даны две пересекающиеся прямые a и b, а также произвольная прямая c. Пусть прямая p перпендикулярна прямой a и прямой b. Требуется доказать, что прямая p перпендикулярна прямой c. Обозначим соответствующие векторы как $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{p}$ и переведем задачу на векторный язык. Нам дано $\vec{p}\cdot\vec{a}=\vec{p}\cdot\vec{b}=0$. Требуется доказать: $\vec{p}\cdot\vec{c}=0$. Вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в виде $\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}$, где α и β — некоторые числа. Тогда верна следующая выкладка:

$$\vec{p}\cdot\vec{c}=\vec{p}(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})=\alpha(\vec{p}\cdot\vec{a})+\beta(\vec{p}\cdot\vec{b})=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=0.$$

Результат вычисления показывает, что прямые p и c перпендикулярны.

в) Пусть даны прямые a и x, перпендикулярные плоскости α. Требуется доказать их параллельность, в переводе на векторный язык: доказать коллинеарность векторов $\vec{a}$ и $\vec{x}$, лежащих соответственно на этих прямых. Выберем на плоскости α пару ортогональных векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$, отложенных от той точки, в которой прямая a пересекает плоскость α. Векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ будем считать единичными. Теперь можно ввести систему координат в пространстве с осями a, b, c. Вектор $\vec{x}$ можно разложить в этой системе координат: $\vec{x}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+$ $+\gamma\vec{c}$. Нам известно, что прямая x перпендикулярна плоскости α, поэтому $x\perp b$ и выполняется равенство $\vec{x}\cdot\vec{b}=0$, т. е. $(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c})\cdot\vec{b}=0$. Тогда $\alpha(\vec{a}\cdot\vec{b})+\beta(\overrightarrow{b^2})+\gamma(\vec{c}\cdot\vec{b})=0$, откуда получаем, учитывая, что $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{c}\cdot\vec{b}=0$, $\beta(\overrightarrow{b^2})=0$. Но тогда $\beta=0$. Аналогично $\gamma=0$. Тем самым мы приходим к равенству $\vec{x}=\alpha\vec{a}$, которое и означает параллельность прямых x и a.

31.21. а) Данные две плоскости имеют равные векторы нормали: (1, 1, 1), т. е. их нормальные векторы коллинеарны, а соответствующие нормалям прямые, перпендикулярные данным плоскостям, параллельны. Значит, и сами плоскости параллельны.

б) Данные две плоскости имеют не коллинеарные нормали: (1, 1, 1) и (1, 1, −1). Значит, они не могут быть параллельными. Но тогда они пересекаются.

31.22.* Достаточно записать в координатах их нормальные векторы. Затем найдем скалярное произведение этих векторов. Плоскости будут перпендикулярны тогда и только тогда, когда скалярное произведение их нормальных векторов будет равно нулю. Аналогично параллельность плоскостей равносильна коллинеарности их нормальных векторов. Угол между плоскостями находится как угол между их нормалями, т. е. не тупой угол между векторами их нормалей. Это делается с использованием скалярного произведения: $\cos \angle \vec{a}, \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$. Здесь $\vec{a}$, $\vec{b}$ — векторы нормалей к данным плоскостям.

31.23. Каждая из этих фигур задает полупространство с граничной плоскостью, уравнение которой $Ax + By + Cz + D = 0$.

31.24. а) Слой между двумя параллельными плоскостями $x = 1$ и $x = -1$.

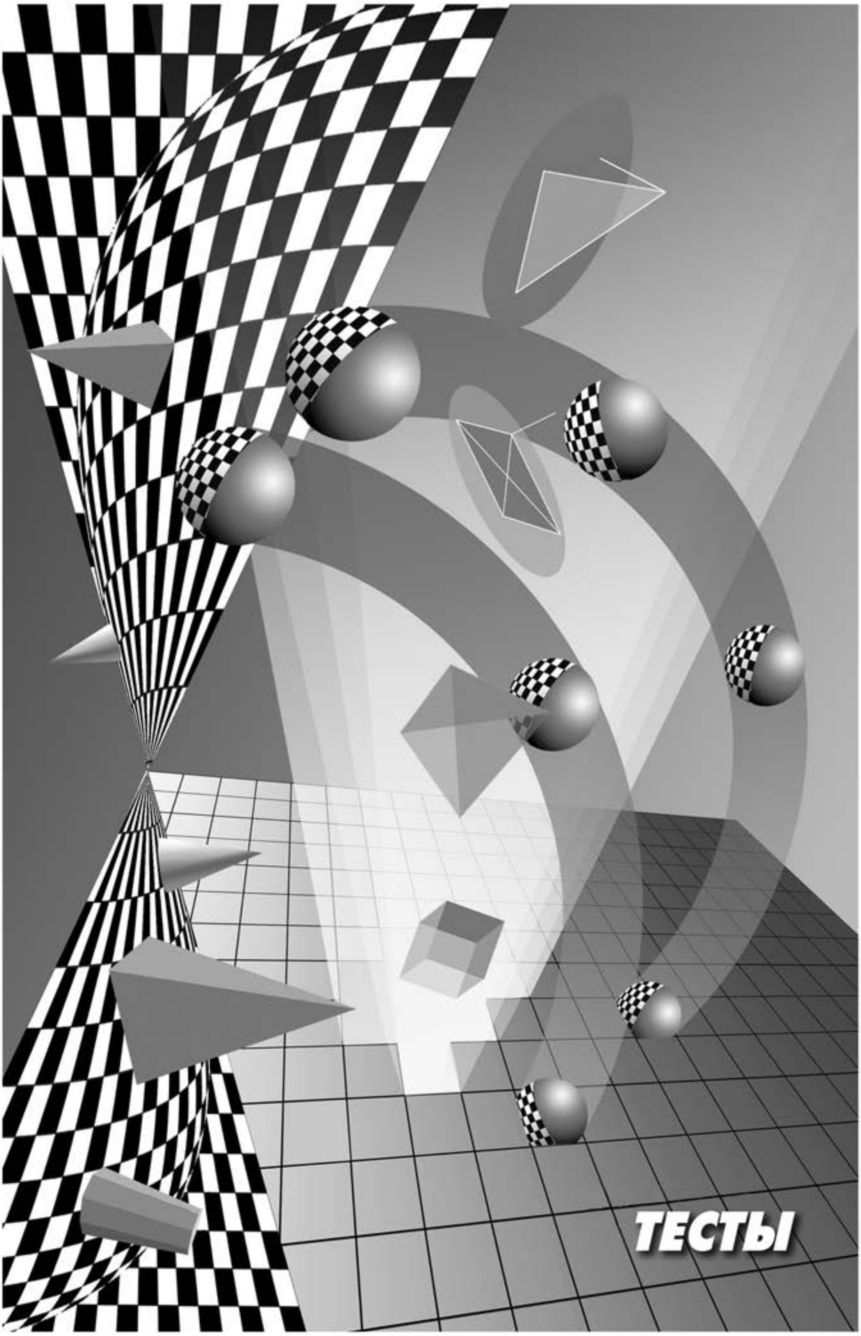
б) Слой между двумя параллельными плоскостями $x - y = -1$ и $x - y = 2$.

в) Слой между двумя параллельными плоскостями $x + y + z = 10$ и $x + y + z = 20$.

г) Прямоугольный параллелепипед, получающийся при пересечении трех попарно перпендикулярных слоев.

д) Тетраэдр, получающийся при пересечении четырех полупространств.

31.25. Будем для простоты считать, что $AB = AC = AD = 1$. Центр описанного шара обозначим точкой O. Введем систему координат с началом A и положительными полуосями AB, AD, AC: x, y, z соответственно. Тогда уравнение плоскости BCD будет таким: $x + y + z - 1 = 0$. Координаты точки O найдем с помощью следующих рассуждений. Во-первых, известно, что центр сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды, лежит на ее высоте либо на ее продолжении. Но тогда все координаты точки O равны: $O(x, x, x)$. (При желании этот результат можно получить, используя координатный метод, приравняв расстояния от $O(x, y, z)$ до вершин $B(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $D(0, 0, 1)$ пирамиды.) Теперь запишем условие равенства расстояний $OA = OB$: $x^2 + y^2 + z^2 = (x-1)^2 + y^2 + z^2$. Отсюда получаем, что $x = \frac{1}{2}$. Аналогично $y = z = \frac{1}{2}$. Подставив эти координаты в уравнение плоскости BCD, видим, что точка O в ней не лежит. Далее получаем, что для нее выполняется неравенство $x + y + z = \frac{3}{2} > 1$. А для точек тетраэдра, как легко видеть, взяв любую точку, достаточно близкую к A, $x + y + z < 1$. Поэтому ясно, что точка O лежит с другой стороны от плоскости BCD, нежели точка A.


ТЕСТЫ

Для оперативного контроля знаний и умений по математике учеников средней школы достаточно давно используются дидактические материалы — специально подобранные и систематизированные упражнения.

Теперь у нас стали признаны тесты, издается много их различных вариантов. Уже проводится в тестовой форме и выпускной экзамен, и вступительный в вузы.

Естественно предложить тесты и для реального школьного преподавания. В каждом тесте, приведенном ниже, пять заданий. Каждое задание сформулировано как утверждение и предполагает выбор одного ответа из четырех возможных. Вид ответа таков: «Да» (условно «+»), «Нет» (условно «−»), «Не знаю» (условно «0»), «Задача неопределенная» (условно «?»). В неопределенных заданиях проверяется умение ученика анализировать условие задачи.

При оценке работы ученика за верный ответ ставили «+1», за неверный ответ — «−1», за ответ «Не знаю» — «0». В результате суммарное число баллов за тест может быть меньше числа верных ответов. Но именно по суммарному числу баллов дается окончательная оценка за выполнение теста (или совокупности тестов). Мораль ясна: ученику «выгоднее» выдавать только такие ответы, в которых он абсолютно уверен. Гадание может ухудшить его результат, причем, как показывает практика, существенно.

При формулировке неопределенных заданий встречаются некоторые трудности. Поясним. Что, собственно, имеется в виду, когда задается, к примеру, такой вопрос: «Верно ли, что $a^2 > 1$?» (Для простоты будем считать, что переменная a задана на максимально «широком» множестве — множестве всех действительных чисел.)

Если мы спрашиваем «Верно ли?», то имеем дело с высказыванием. Однако напрямую здесь высказывания нет — есть предикат (выражение с переменной, высказывательная форма) или даже что-то еще из-за вопросительной формы задания. Чтобы превратить предикат в высказывание, требуется на переменную a «навесить» некий квантор — всеобщности или существования (и в какой-то момент убрать вопросительную форму). Какой же квантор — по умолчанию — «навешен» на переменную a в таком задании? Если подразумевается квантор всеобщности (верно ли для любого a ...), то ответ «Нет». Если подразумевается квантор существования (верно ли, что существует a ...), то ответ «Да». Любой из этих ответов нас не устраивает, ибо исключает фиксацию неопределенности. Хочется, чтобы ответ был такой: «Смотря какое a», или, что равносильно, «Иногда да, иногда нет».

Ситуация непростая, ибо она ориентирована на язык — естественный и математический. Принятые в математике кванторы «убивают» неопределенность.

Для кодирования неопределенности в предлагаемых тестах используется слово «некоторый». Вот примеры. Задание таково: «Пусть a — некоторое действительное число. Верно ли неравенство $a^2 > -1$?» Разумеется, ответ «Да», ибо оно верно всегда. Еще одно задание таково: «Верно ли неравенство $a^2 < -1$?» Разумеется, ответ «Нет», ибо оно всегда неверно. Следующее задание таково: «Верно ли неравенство $a^2 > 1$?» А теперь ответ таков: «Иногда да, иногда нет».

Наконец, можно убрать вопросительную форму предложения и сразу задать высказывание в такой форме: «Пусть a — некоторое действительное число. Неравенство $a^2 > 1$ является верным».

Приведем теперь простой геометрический пример, причем уже сразу в утвердительной форме:

«Дан некоторый треугольник со сторонами $3a$, $4a$, $5a$. Верны такие утверждения:

1. При любом значении $a > 0$ этот треугольник является прямоугольным. (Ответ: «+».)

2. При любом значении $a > 0$ центр описанной около него окружности лежит внутри треугольника. (Ответ: «−».)

3. При любом значении $a > 0$ его площадь больше 1. (Ответ: «?».)».

Теперь перейдем к самим тестам.

X КЛАСС

Тест 10.1. Скрещивающиеся прямые

Две прямые скрещиваются, если:

1) это прямые AD и BC, $ABCD$ — тетраэдр;

2) это прямые AK и CL, $ABCD$ — тетраэдр, точка K — середина ребра BD, точка L — середина ребра AD;

3) это прямые AX и CY, $ABCD$ — тетраэдр, точка X — некоторая точка внутри грани BCD, точка Y — некоторая точка внутри грани ABC;

4) это прямые AB_1 и A_1D, идущие через вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$;

5) это прямые AC и B_1D, идущие через вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Ответы: + + ? + +

Тест 10.2. Признаки перпендикулярности прямой и плоскости

Прямая a и плоскость α взаимно перпендикулярны, если:

1) прямая a соединяет центры граней AA_1D_1D и BB_1C_1C куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, плоскость α — это плоскость грани BB_1C_1C;

2) прямая a соединяет середины ребер AA_1 и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, плоскость α — это плоскость BB_1D_1;

3) прямая a соединяет вершину A куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с некоторой точкой его поверхности, плоскость α — это плоскость грани CC_1D_1D;

4) прямая a соединяет середины ребер основания AB и CD правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$, плоскость α — это плоскость PCD;

5) прямая a соединяет центры граней ABC и DBC правильного тетраэдра $ABCD$, плоскость α — это плоскость BKC, где точка K — середина ребра AD.

Ответы: + + ? − +

Тест 10.3. Свойства перпендикулярных плоскостей

Пусть плоскости α и β взаимно перпендикулярны и пересекаются по прямой p. Тогда:

1) если $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $a \perp p$, $b \perp p$, причем прямые a и b пересекаются, то $a \perp b$;

2) для всякой прямой a из плоскости α, пересекающей прямую p, найдется в плоскости β прямая, которая перпендикулярна прямой a;

3) если $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $a \perp \beta$, причем прямые a и b пересекаются, то $a \perp b$;

4) если $a \subset \alpha$, прямая a не перпендикулярна прямой p, то в плоскости β найдется прямая b, перпендикулярная прямой a;

5) найдутся прямые a и b, такие, что $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, причем прямые a и b перпендикулярны и каждая из них не перпендикулярна прямой p.

Ответы: + + + + −

Тест 10.4. Признаки перпендикулярности плоскостей

Плоскости α и β взаимно перпендикулярны, если:

1) $PABC$ — правильная треугольная пирамида с основанием ABC, $\alpha = (PAK)$, где K — середина BC, $\beta = (ABC)$;

2) $PABCD$ — правильная четырехугольная пирамида с основанием $ABCD$, $\alpha = (PAC)$, $\beta = (PBD)$;

3) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $\alpha = (AA_1C_1)$, $\beta = (BB_1D_1)$;

4) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — некоторый прямоугольный параллелепипед, $\alpha = (ABK)$, $\beta = (A_1B_1K)$, где точка K — середина ребра DD_1;

5) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $\alpha = (AB_1C)$, $\beta = (AD_1C)$.

Ответы: + + + ? −

Тест 10.5. Признаки параллельности плоскостей

Две плоскости параллельны, если:

1) они пересекают третью плоскость по параллельным прямым;

2) для каждой прямой в одной из них есть параллельная прямая в другой;

3) они перпендикулярны одной и той же плоскости;

4) каждая прямая, пересекающая одну из них, пересекает и другую;

5) их проекциями на третью данную плоскость являются параллельные прямые.

Ответы: − + − + +

Тест 10.6. Свойства параллельных плоскостей

Пусть две плоскости параллельны. Тогда:

1) если одна из них пересекает данную прямую, то и другая пересекает эту же прямую;

2) если одна из них перпендикулярна данной прямой, то и другая перпендикулярна этой же прямой;

3) если одна из них перпендикулярна данной плоскости, то и другая перпендикулярна этой же плоскости;

4) если одна из них пересекает куб по треугольнику, то и другая пересекает этот же куб по треугольнику;

5) если одна из них пересекает тетраэдр по четырехугольнику, то и другая пересекает этот же тетраэдр по четырехугольнику.

Ответы: + + + − −

Тест 10.7. Параллельность прямой и плоскости

1) Прямая a параллельна плоскости α и некоторой прямой b. Тогда прямая b параллельна плоскости α.

2) Некоторые прямые a и b параллельны плоскости α. Тогда a и b параллельны.

3) Прямые a и b параллельны. Прямая a пересекает плоскость α. Тогда прямая b пересекает плоскость α.

4) Некоторая прямая a не параллельна прямой b и параллельна плоскости α. Тогда прямая b не параллельна плоскости α.

5) Прямая a параллельна плоскости α. Плоскость α параллельна некоторой плоскости β. Тогда прямая a параллельна плоскости β.

Ответы: ? ? + ? ?

Тест 10.8. Параллельное проектирование

При параллельном проектировании на данную плоскость α:

1) два неравных отрезка могут иметь равные проекции;
2) проекцией прямой может быть отрезок;
3) найдутся такие скрещивающиеся прямые, которые проектируются в параллельные прямые;
4) проекцией окружности может быть отрезок;
5) проекцией окружности может быть не равная ей окружность.

Ответы: + − + + −

Тест 10.9. Ортогональное проектирование

В результате ортогонального проектирования:

1) проекцией квадрата может быть квадрат;
2) проекцией квадрата может быть прямоугольник с неравными сторонами;
3) проекцией куба может быть квадрат;
4) проекцией тетраэдра может быть треугольник;
5) проекцией шара может быть не круг.

Ответы: + + + + −

Тест 10.10. Расстояние

Пусть дана четырехугольная пирамида $PABCD$ с основанием $ABCD$, в которой каждое ребро равно 2. В этой пирамиде:

1) расстояние от A до прямой PC больше 1;
2) расстояние от C до плоскости BPD больше 1;
3) расстояние от прямой AD до плоскости PBC больше 2;
4) расстояние от прямой CD до прямой PX меньше 2, где точка X лежит на ребре AB;
5) расстояние от плоскости PDC до плоскости, ей параллельной и проходящей через центр основания, больше 1.

Ответы: + + − + −

Тест 10.11. Угол между прямыми

Угол между прямыми a и b не больше 60°, если:

1) $a=(AB)$, $b=(CD)$, $ABCD$ — правильный тетраэдр;
2) $a=(AB_1)$, $b=(CD_1)$, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб;
3) $a=(AB_1)$, $b=(A_1D)$, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб;
4) $a=(AB_1)$, $b=(A_1C)$, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб;
5) $a=(B_1D)$, $b=(BC_1)$, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.

Ответы: − − + − −

Тест 10.12. Угол между прямой и плоскостью

Угол α больше угла β, если дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и:

1) α — угол между прямой C_1D_1 и плоскостью AA_1D_1, β — угол между прямой AB_1 и плоскостью BB_1C_1;
2) α — угол между прямой A_1C и плоскостью CDD_1, β — угол между прямой A_1C и плоскостью CBB_1;
3) α — угол между прямой A_1C и плоскостью $A_1B_1C_1$, β — угол между прямой B_1D и плоскостью ABC;
4) α — угол между прямой DB_1 и плоскостью ABC, β — угол между прямой DB_1 и плоскостью CDD_1;
5) α — угол между прямой AB_1 и плоскостью BB_1C_1, β — угол между прямой AC_1 и плоскостью ABC.

Ответы: + − − − +

Тест 10.13. Угол между плоскостями

Пусть в тетраэдре $ABCD$ все плоские углы при вершине D прямые и ребра, выходящие из вершины D, равны, точка K — середина ребра AC. Тогда угол $\alpha > 45°$, если α — угол между плоскостями:

1) ABD и CBD;
2) ABC и CAD;
3) ABC и CBD;
4) KBD и CAD;
5) BDK и ABD.

Ответы: + + + + −

Тест 10.14. Углы между прямыми и плоскостями

Пусть в правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ с основанием $ABCD$ все ребра равны. Тогда:

1) угол между прямой PA и плоскостью PCD больше, чем угол между прямой PD и плоскостью PBC;
2) угол между прямой PA и прямой BC больше, чем угол между прямой PA и плоскостью ABC;
3) угол между прямой PB и плоскостью ABC больше, чем угол между плоскостью PAD и плоскостью ABC;
4) угол между плоскостью PDC и плоскостью ABC больше, чем угол между плоскостью PAD и плоскостью PBC;
5) угол между плоскостью PAB и плоскостью PCD больше, чем угол между плоскостью PAD и плоскостью ABC.

Ответы: − + − − +

XI КЛАСС

Тест 11.1. Шар

Дан шар. В этом шаре:

1) существует сечение, которое является наименьшим по площади;

2) чем дальше от его центра находится сечение, тем оно больше по площади;

3) для каждого сечения найдется такое, которое равно первому и перпендикулярно ему (т. е. находится в плоскости, перпендикулярной плоскости первого сечения);

4) на его поверхности найдутся четыре точки, расстояния между которыми равны друг другу;

5) для каждой оси вращения найдется плоскость симметрии этого шара, которая ему перпендикулярна.

Ответы: − − + + +

Тест 11.2. Цилиндр

Дан цилиндр вращения. Для этого цилиндра:

1) наибольшим по площади прямоугольным сечением является осевое;

2) существуют неравные круговые сечения;

3) каждая его плоскость симметрии содержит его ось вращения;

4) существуют взаимно перпендикулярные плоскости симметрии;

5) существует такая плоскость, на которую ортогональной проекцией данного цилиндра является и не круг, и не прямоугольник.

Ответы: + − − + +

Тест 11.3. Правильная призма

Дана правильная n-угольная призма. Тогда:

1) при $n=4$ в ней найдутся две параллельные боковые грани;

2) при $n=3$ в ней найдутся две перпендикулярные боковые грани;

3) при любом n в ней существует точка, равноудаленная от всех вершин;

4) при любом n в ней существует точка, равноудаленная от всех боковых граней;

5) при некотором n у нее существует n плоскостей симметрии.

Ответы: + − + + −

Тест 11.4. Прямоугольный параллелепипед

Дан прямоугольный параллелепипед, не являющийся кубом. Тогда существует:

1) его сечение, являющееся трапецией;
2) точка, равноудаленная от всех его вершин;
3) точка, равноудаленная от всех его граней;
4) его проекция, являющаяся шестиугольником;
5) диагональ, которая перпендикулярна другой его диагонали.

Ответы: + + − + −

Тест 11.5. Конус

Дан конус. Тогда:

1) наибольшим по площади его треугольным сечением является осевое;
2) существует наименьшее по площади его круговое сечение;
3) каждая его плоскость симметрии содержит его ось вращения;
4) существует точка, равноудаленная от его вершины и от всех точек окружности его основания;
5) существует такая плоскость, на которую его ортогональной проекцией является не круг и не треугольник.

Ответы: − − + + +

Тест 11.6. Правильная пирамида

В правильной n-угольной пирамиде:

1) при любом n есть точка, равноудаленная от всех вершин;
2) при любом n есть точка, равноудаленная от всех граней;
3) при любом n есть ось симметрии;
4) при некотором n угол между соседними боковыми гранями тупой;
5) при некотором n найдутся взаимно перпендикулярные грани.

Ответы: + + − ? ?

Тест 11.7. Объем цилиндра

Объем цилиндра больше 10, если:

1) радиус его основания больше 1 и его высота больше 1;
2) радиус его основания меньше 1 и его высота меньше 2;
3) его осевым сечением является квадрат со стороной 3;
4) диагональ его осевого сечения равна 4 и образует с плоскостью основания угол $60°$;
5) он вписан в шар радиуса 2.

Ответы: − − + + −

Тест 11.8. Объем призмы

Объем некоторой призмы больше 5, если этой призмой является:

1) куб с диагональю 3;

2) прямоугольный параллелепипед, диагональ которого равна 3 и составляет с его ребрами углы 60°, 60° и 45°;

3) правильная шестиугольная призма, у которой все ребра равны 1;

4) наклонный параллелепипед, у которого все ребра равны 2;

5) правильная треугольная призма, каждое ребро которой больше 2.

Ответы: + – – ? ?

Тест 11.9. Объем конуса

Даны два конуса. Объем второго из них больше объема первого, если:

1) радиус основания второго конуса в два раза больше радиуса основания первого конуса, а высота второго конуса в два раза меньше высоты первого конуса;

2) образующая поверхности второго конуса больше образующей поверхности первого конуса и радиус основания второго конуса больше радиуса основания первого конуса;

3) площадь осевого сечения второго конуса больше площади осевого сечения первого конуса;

4) второй конус описан около шара радиуса R, а первый конус описан около шара радиуса $0{,}5R$;

5) образующие поверхности этих конусов равны и образующая поверхности второго конуса составляет с основанием угол, больший, чем образующая поверхности первого конуса.

Ответы: + – – – –

Тест 11.10. Объем пирамиды

Объем пирамиды больше 1, если этой пирамидой является:

1) правильный тетраэдр с ребром, большим чем 2;

2) правильная треугольная пирамида, у которой боковые ребра равны 2 и все плоские углы при вершине прямые;

3) правильная треугольная пирамида, у которой боковые ребра равны 10, а плоский угол при вершине равен 1°;

4) четырехугольная пирамида, у которой все ребра равны 2;

5) тетраэдр, в котором две грани являются равносторонними треугольниками со стороной 10, а угол между этими гранями тупой.

Ответы: + + – + –

Тест 11.11. Объем шара

Верно, что:

1) радиус шара пропорционален кубическому корню из его объема;

2) если радиус шара больше 1, то объем этого шара больше 4;

3) чем больше объем шара, тем больше объем правильного тетраэдра, вписанного в него;

4) если даны шары радиусами R_1 и R_2, причем $R_2 = 2R_1$, то объем большего шара меньше семи объемов меньшего шара;

5) если даны шары радиусами R_1 и R_2 с объемами V_1 и V_2 соответственно и $V_2 > 2V_1$, то $R_2/R_1 > 1{,}4$.

Ответы: + + + − −

Тест 11.12. Площадь сферы

Верно, что:

1) при увеличении радиуса сферы в два раза площадь ее поверхности увеличивается тоже в два раза;

2) площадь сферы пропорциональна объему ограниченного ею шара;

3) существует такой шар, у которого объем численно меньше площади его поверхности;

4) площадь поверхности шара в два раза больше площади поверхности полушара;

5) чем больше площадь сферы, тем больше площадь поверхности правильной треугольной пирамиды, описанной около этой сферы.

Ответы: − − + − −

Тест 11.13. Площадь поверхности цилиндра вращения

Верно, что:

1) существует цилиндр, у которого площадь боковой поверхности в два раза меньше площади его поверхности;

2) существует цилиндр, площадь поверхности которого равна 2, а развертка боковой поверхности которого является квадратом;

3) увеличив радиус основания и образующую цилиндра в два раза, мы увеличим площадь его поверхности в два раза;

4) чем больше объем цилиндра, тем больше площадь его поверхности;

5) внутри данного цилиндра может находиться цилиндр с большей площадью поверхности.

Ответы: + + − − −

Тест 11.14. Площадь поверхности конуса вращения

Верно, что:

1) существует конус, у которого площадь боковой поверхности в два раза меньше площади его поверхности;

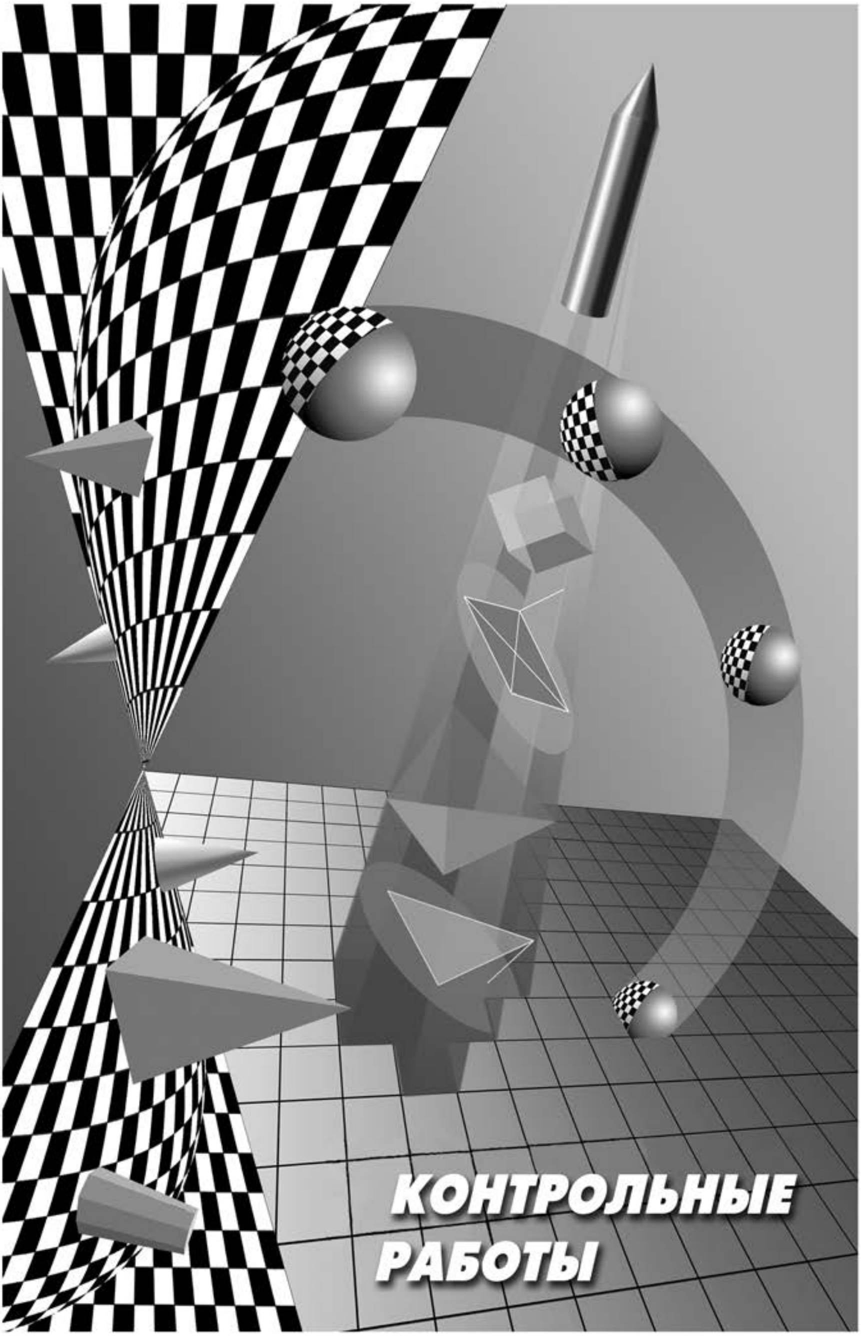
2) разверткой некоторого конуса, у которого площадь поверхности равна 10, является полукруг площадью π;

3) увеличив радиус основания конуса и его образующую в два раза, мы увеличим площадь его поверхности тоже в два раза;

4) чем больше поверхность конуса, тем больше его объем;

5) внутри данного конуса может находиться конус с большей площадью поверхности.

Ответы: + − − − −


КОНТРОЛЬНЫЕ
РАБОТЫ

X КЛАСС

Контрольная работа № 1
(по теме «Основания стереометрии»)

Вариант 1

1. Изобразите плоскость α и трапецию $ABCD$ ($BC \parallel AD$) на ней. Пусть точка M вне плоскости α, а точка K на плоскости α, но вне трапеции $ABCD$. Изобразите прямые MP и KE, пересекающие прямую BC в точках P и E соответственно. Как расположены прямые MP и KE по отношению: а) к плоскости α; б) к прямой AD?

2. Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точки M и N, принадлежащие ребрам C_1C и AB соответственно. Изобразите сечение куба плоскостью NB_1M.

3. Верно ли утверждение: через сторону треугольника и центр описанной вокруг него окружности проходит плоскость и притом единственная?

4. В пространстве расположены три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Точка A удалена от точек B и C на 10 см, а от прямой BC на 8 см. Найдите расстояние от B до C.

Вариант 2

1. Изобразите плоскость α и параллелограмм $ABCD$ на ней. Пусть точка P вне плоскости α, а точка E на плоскости α, но вне параллелограмма $ABCD$. Изобразите прямые PM и EK, пересекающие прямую AB в точках M и K соответственно. Как расположены прямые PM и EK по отношению: а) к плоскости α; б) к прямой CD?

2. Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точки M и N, принадлежащие ребрам AA_1 и BC соответственно. Изобразите сечение куба плоскостью NB_1M.

3. Верно ли утверждение: через медиану треугольника и центр вписанной в него окружности проходит плоскость и притом единственная?

4. В пространстве расположены три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Точка B удалена от точек A и C на 10 см. Расстояние от A до C равно 16 см. Найдите расстояние от точки B до прямой AC.

Контрольная работа № 2
(по теме «Перпендикулярность прямых и плоскостей»)

Вариант 1

1. К плоскости треугольника ABC, в котором $AC = BC = 5$ и $AB = 8$, через точку A проведен перпендикуляр AP, а через точку C проведена прямая, параллельная AP, на которой отложен отрезок $CO=4$. Найдите расстояние от точки O до середины стороны AB.

2. В основании пирамиды $PABC$ — прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle C=90°$, а катеты 5 и 12. Боковая грань PAB перпендикулярна плоскости основания и имеет площадь 65 квадратных единиц. Найдите высоту пирамиды.

3. Известно, что плоскости α и β взаимно перпендикулярны, $ABCD$ — параллелограмм с острым углом A в плоскости α, а $ABMN$ — прямоугольник в плоскости β. Определите, существует ли плоскость, в которой лежат прямые: а) DC и NM; б) DA и AN; в) DA и BM. Найдите величину угла NAD. Найдите длину DN, считая $CB=a$, $AN=b$.

Вариант 2

1. К плоскости треугольника ABC, в котором $AC=AB=6$, $QBAC=60°$, через точку B проведен перпендикуляр BP, а через точку A проведена прямая, параллельная BP, на которой отложен отрезок $AD=3$. Найдите расстояние от точки D до середины стороны BC.

2. В основании пирамиды $PABC$ — прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle C=90°$, $AB=13$ и $BC=12$. Боковая грань PAC перпендикулярна плоскости основания и имеет площадь 15 квадратных единиц. Найдите высоту пирамиды.

3. Известно, что плоскости α и β взаимно перпендикулярны, $ABCD$ — прямоугольник в плоскости α, $ADKP$ — трапеция в плоскости β. Определите, существует ли плоскость, в которой лежат прямые: а) BC и PK; б) DC и AP; в) DC и DK. Найдите величину угла CDK. Найдите длину KD, считая $KC=m$, $AB=n$.

Контрольная работа № 3 (по теме «Проекции. Расстояния. Углы»)

Вариант 1

1. Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точку M на ребре BB_1, такую, что $B_1M:MB=1:2$. Пусть ребро куба равно 6. Вычислите: а) $|M;\ D_1D|$; б) $|M;\ CD|$; в) $|A_1A;\ CD|$; г) $|M;\ (DCC_1)|$; д) $\operatorname{tg}\angle(MC;\ (AA_1B_1))$; е) $\operatorname{tg}\angle((AMC);\ (ABC))$; ж) $\operatorname{tg}\angle(AM;\ CD)$.

2. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A=60°$, $AB=4$, $AD=4$. К плоскости параллелограмма проведен перпендикуляр через вершину B и на нем отложен отрезок $BM=2\sqrt{3}$. Точка K — середина MD. Вычислите: а) $|M;\ AC|$; б) $|M;\ CD|$; в) $|K;\ (ABC)|$; г) $\angle((MBD);\ (MBC))$; д) $\sin\angle((MDC);\ (ABC))$.

3. Верно ли утверждение: если две плоскости перпендикулярны к третьей, то они параллельны?

Вариант 2

1. Изобразите куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точку K на ребре CC_1, такую, что $C_1K : KC = 1 : 3$. Пусть ребро куба равно 4. Вычислите: а) $|K; AA_1|$; б) $|K; AD|$; в) $|C_1C; AB|$; г) $|K; (ABB_1)|$; д) $\text{tg}\,\angle(KB; (CC_1D_1))$; е) $\text{tg}\,\angle((KBD); (ABC))$; ж) $\text{tg}\,\angle(BK; AD)$.

2. В параллелограмме $ABCD$ $\angle A = 60°$, $AB = 6$, $AD = 6$. К плоскости параллелограмма проведен перпендикуляр через вершину B и на нем отложен отрезок $BK = 3\sqrt{3}$. Точка M — середина KD. Вычислите: а) $|K; AC|$; б) $|K; AD|$; в) $|M; (ABC)|$; г) $\angle((KBD); (KBA))$; д) $\sin\angle((KAD); (ABC))$.

3. Верно ли утверждение: если две плоскости перпендикулярны к третьей, то они перпендикулярны друг другу?

Контрольная работа № 4
(по теме «Фигуры вращения»)

Вариант 1

1. Сфера касается плоскости α в точке M. На плоскости α взята точка K, удаленная от точки M на 12, а от центра шара на 13. Чему равен диаметр шара?

2. В конусе, образованном вращением прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8 вокруг меньшего катета, найдите: а) расстояние от центра основания до образующей конической поверхности; б) площадь сечения, параллельного основанию и удаленного от вершины на 1,5; в) площадь осевого сечения.

Вариант 2

1. Сфера касается плоскости α в точке P. На плоскости α взята точка K, удаленная от точки P на 5, а от центра шара на 13. Чему равен диаметр шара?

2. В конусе, образованном вращением прямоугольного треугольника с катетами 6 и 8 вокруг большего катета, найдите: а) расстояние от центра основания до образующей конической поверхности; б) площадь сечения, параллельного основанию и удаленного от вершины на 2; в) площадь осевого сечения.

XI КЛАСС

Контрольная работа № 5 (по теме «Многогранники»)

Вариант 1

1. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC = 20$ и $AC = 24$. Длина диагонали B_1C равна 30. Найдите: а) высоту призмы; б) синус угла наклона B_1C к плоскости ABC; в) косинус угла наклона B_1C к грани AA_1C_1C; г) площадь сечения призмы плоскостью AB_1C; д) тангенс угла наклона сечения из пункта «г» к плоскости основания; е) расстояние между прямыми AA_1 и BC; ж) тангенс угла наклона сечения A_1BC к плоскости основания.

2. В цилиндр с осью $OO_1 = 8$ и радиусом основания 6 вписана правильная треугольная пирамида O_1ABC, в которой основание ABC вписано в нижнее основание цилиндра. Изобразите указанные цилиндр и пирамиду. Найдите: а) длину бокового ребра пирамиды; б) площадь основания пирамиды; в) площадь сечения цилиндра плоскостью, проведенной через сторону основания пирамиды, параллельно оси OO_1; г) расстояние от оси OO_1 до построенного в пункте «в» сечения.

Вариант 2

1. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC, в котором $AC = AB = 20$ и $BC = 32$. Диагональ A_1B составляет с основанием угол $60°$. Найдите: а) высоту призмы; б) длину диагонали A_1B; в) косинус угла наклона A_1B к грани BB_1C_1C; г) площадь сечения призмы плоскостью A_1BC; д) синус угла наклона сечения из пункта «г» к плоскости основания; е) расстояние между прямыми CC_1 и BA; ж) тангенс угла наклона сечения ABC_1 к плоскости основания.

2. В конус с высотой $PO = 8$ и радиусом основания 6 вписана правильная четырехугольная пирамида $PABCD$. Изобразите указанные конус и пирамиду. Найдите: а) длину бокового ребра пирамиды; б) площадь основания пирамиды; в) площадь сечения конуса плоскостью, проведенной через вершину конуса и сторону основания пирамиды; г) расстояние от точки O до построенного в пункте «в» сечения.

Контрольная работа № 6 (по теме «Объемы тел»)

Вариант 1

1. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат. Высота параллелепипеда вдвое больше стороны квадрата. Площадь сечения, проведенного через противоположные боковые ребра параллелепипеда, равна $18\sqrt{2}$. Найдите объем: а) параллелепипеда; б) конуса, основанием которого служит круг, вписанный в нижнее основание параллелепипеда, а вершиной — произвольная точка верхнего основания.

2. Основанием пирамиды $PABCD$ служит прямоугольник $ABCD$. Грани PAB и PBC перпендикулярны к плоскости основания, а грани PCD и PAD наклонены к основанию под углами 30° и 60° соответственно. Высота пирамиды равна h. Из предложенных формул для вычисления объема пирамиды выберите верную: а) $V=\frac{h^3}{3}$; б) $V=\frac{h^3}{\sqrt{3}}$; в) $V=h^3\sqrt{3}$.

3. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC, в котором $\angle C=90°$, $CA=6$, $CB=8$. Проекцией точки C_1 на плоскость ABC является точка O — середина высоты треугольника ABC, проведенной к гипотенузе AB. Боковое ребро призмы наклонено к основанию под углом α, тангенс которого равен 2,5. Найдите объем призмы и сравните его с объемом шара радиуса 3.

Вариант 2

1. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат. Высота параллелепипеда составляет $\frac{2}{3}$ стороны квадрата. Площадь сечения, проведенного через противоположные боковые ребра параллелепипеда, равна $24\sqrt{2}$. Найдите объем: а) параллелепипеда; б) конуса, основанием которого служит круг, описанный вокруг нижнего основания параллелепипеда, а вершиной — произвольная точка верхнего основания.

2. Основанием пирамиды $PABCD$ служит прямоугольник $ABCD$. Грани PBC и PCD перпендикулярны к плоскости основания, а грани PAB и PAD наклонены к основанию под углами 45° и 30° соответственно. Высота пирамиды равна h. Из предложенных формул для вычисления объема пирамиды выберите верную: а) $V=\frac{h^3}{3}$; б) $V=\frac{h^3}{\sqrt{3}}$; в) $V=h^3\sqrt{3}$.

3. Основанием наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC, в котором $\angle C=90°$, $CA=6$, $CB=8$. Проекцией точки C_1 на плоскость ABC является точка O — точка высоты треугольника ABC, проведенной к гипотенузе AB и делящая высоту в отношении $2:1$, считая от вершины прямого угла. Боковое ребро призмы наклонено к основанию под углом α, тангенс которого равен 2,5. Найдите объем призмы и сравните его с объемом шара радиуса 4.

Контрольная работа № 7
(по теме «Объемы тел и площади их поверхностей»)

Вариант 1

1. В основании прямоугольного параллелепипеда — квадрат. Диагональ параллелепипеда, равная $2d$, образует с боковой гранью угол $30°$. Найдите объем параллелепипеда и площадь его боковой поверхности.

2. В основании пирамиды $PABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle C = 90°$, $\angle A = \arccos 0{,}6$, $AB = 10$. Плоскости PAB и PBC образуют с основанием угол $90°$, а грань PAC наклонена к основанию под углом $45°$. Найдите объем пирамиды и площадь грани PAC.

3. Рассмматриваются всевозможные цилиндры, длина диагонали осевого сечения которых равна $4\sqrt{3}$. Каковы должны быть высота и радиус цилиндра, чтобы его объем был наибольшим? Найдите объем этого цилиндра и площадь его полной поверхности.

Вариант 2

1. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 6 и образует с плоскостью боковой грани, являющейся квадратом, угол $45°$. Найдите объем параллелепипеда и площадь его полной поверхности.

2. В основании пирамиды $PABC$ лежит прямоугольник $ABCD$, в котором диагональ $AC = 10$, а $\angle CAD = \arccos 0{,}8$. Плоскости PAB и PBC образуют с основанием угол $90°$, а грань PCD наклонена к основанию под углом $45°$. Найдите объем пирамиды и площадь грани PAD.

3. Рассматриваются всевозможные конусы, образующая которых равна $2\sqrt{3}$. Каковы должны быть высота и радиус основания конуса, чтобы его объем был наибольшим? Вычислите объем этого конуса и площадь его поверхности.

Контрольная работа № 8
(по теме «Координаты и векторы»)

Вариант 1

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед. Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Точка M — середина отрезка B_1C_1, а O — точка пересечения AC и BD. Выразите через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ следующие векторы: а) $\overrightarrow{DB_1}$; б) $\overrightarrow{DM}$; в) $\overrightarrow{MO}$.

2. Заданы точки $A(-3;\ 2;\ 5)$, $B(2;\ 3;\ 3)$, $C(-13;\ 0;\ 9)$, $D(4;\ -1;\ 6)$. Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой, а прямая BD ей перпендикулярна.

3. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, стороны оснований которой равны 2, а боковое ребро — 4. Точка M — середина ребра BC. Вычислите скалярные произведения векторов: а) $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CC_1}$; б) $\overrightarrow{MA_1}$ и $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{BA}$; г) $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{BC_1}$.

4. Даны единичные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Известно, что $\angle \vec{a}\vec{b} = 90°$, $\angle \vec{b}\vec{c} = 120°$, $\angle \vec{a}\vec{c} = 120°$. Вычислите: а) $(\vec{a}+\vec{b}) \times \times (\vec{b}+\vec{c})$; б) угол между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{b}+\vec{c}$.

Вариант 2

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед. Пусть $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$. Точка M — середина отрезка C_1D_1, а O — точка пересечения AC и BD. Выразите через векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ следующие векторы: а) $\overrightarrow{BD_1}$; б) $\overrightarrow{BM}$; в) $\overrightarrow{OM}$.

2. Заданы точки $A(-3;\ -3;\ -2)$, $B(-5;\ -2;\ 3)$, $C(-9;\ 0;\ 13)$, $D(-6;\ 1;\ -4)$. Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой, а прямая AD ей перпендикулярна.

3. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, стороны оснований которой равны 4, а боковое ребро равно 2. Точка M — середина ребра AB. Вычислите скалярные произведения векторов: а) $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{MC_1}$ и $\overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$; г) $\overrightarrow{BA_1}$ и $\overrightarrow{CB_1}$.

4. Даны единичные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Известно, что $\angle \vec{a}\vec{b} = 120°$, $\angle \vec{b}\vec{c} = 60°$, $\angle \vec{a}\vec{c} = 90°$. Вычислите: а) $(\vec{a}+\vec{c}) \times \times (\vec{a}+\vec{b})$; б) угол между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}+\vec{c}$.

Примерное тематическое планирование. Геометрия, 10—11 классы

Программа базового курса геометрии среднего (полного) общего образования по математике (10—11 классы), по учебнику «Геометрия.10—11», авторы — А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели курса геометрии старшей школы (10—11 классы) включают *общие* цели изучения математики, с которых начинается Федеральный государственный стандарт среднего (полного) общего образования по математике, а также содержат цели, *специфические* именно для курса геометрии старшей школы:

1) систематическое изучение свойств геометрических фигур в пространстве и развитие пространственного мышления;

2) развитие логического мышления при изучении систематического дедуктивного курса стереометрии;

3) развитие практического понимания геометрии, ее возможностей для описания свойств реальных предметов и их взаимного расположения;

4) подготовка геометрического аппарата, необходимого для изучения смежных дисциплин в школе, а также для профессиональной подготовки, для изучения математики в высших и в средних специальных учебных заведениях (в случае необходимости).

Следует подчеркнуть, что курс геометрии на базовом уровне ориентирован, прежде всего, на общеобразовательную и общекультурную подготовку учеников.

Содержание программы, соответствующей учебнику «Геометрия. 10—11», охватывает весь раздел «Геометрия» «Фундаментального ядра содержания общего образования».

Требования к уровню подготовки выпускников заданы Федеральным государственным образовательным стандартом общего образования по математике.

Курс стереометрии в учебниках А. Д. Александрова построен так, что изучать его можно после любого учебника геометрии в основной школе, поскольку плоскость в нем определяется как фигура, на которой выполняется евклидова планиметрия. Каким образом в основной школе была построена планиметрия, не играет никакой роли, так как важнейшие факты евклидовой планиметрии были установлены в любом курсе геометрии основной школы.

В структуре курса стереометрии выделяются три линии: первая линия — это линия *геометрии построений* изучаемых фигур, вторая линия — это линия *геометрии вычислений* величин построенных фигур, а третья линия — это линия *идей* *и методов современной геометрии*. Ведущей в 10 классе является линия *геометрии построений* (глава 1 «Основания стереометрии» и глава 2 «Перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей»), а в 11 классе ведущими становятся линия *геометрии вычислений* (глава 5 «Объемы тел и площади их поверхностей») и линия *идей и методов современной геометрии* (глава 6 «Координаты и векторы»).

Две центральные главы учебника «Геометрия. 10—11» — глава 3 «Фигуры вращения» (10 класс) и глава 4 «Многогранники» (11 класс) — посвящены основному предмету стереометрии — геометрическим телам и их поверхностям. Они носят во многом описательный, наглядный характер. Много внимания в этих главах уделяется *симметрии* изучаемых тел — важнейшему общекультурному понятию.

Содержание программы

1. Основания стереометрии.

Аксиомы стереометрии. Равенство фигур. Важнейшие теоремы о треугольниках. Способы задания прямых и плоскостей в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Параллельное проектирование. Утверждения существования и единственности. Построения в пространстве. Построение пирамид и призм.

2. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.

Перпендикулярность прямой и плоскости. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Связь между перпендикулярностью прямой и плоскости и параллельностью прямых. Основные теоремы о перпендикулярности прямой и плоскости. Угол между плоскостями. Перпендикулярность плоскостей. Параллельность плоскостей. Параллельность прямой и плоскости. Ортогональное проектирование. Теорема о трех перпендикулярах. Расстояние между фигурами. Расстояние между фигурами и параллельность. Сонаправленность лучей. Угол между лучами. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью.

3. Фигуры вращения.

Сфера и шар. Взаимное расположение сферы и плоскости. Касательная плоскость сферы. Симметрия сферы и шара. Цилиндр. Конус. Усеченный конус.

4. Многогранники.

Призма как частный случай цилиндра. Правильная призма. Параллелепипед. Пирамида как частный случай конуса. Правильная пирамида. Тела и их поверхности. Многогранники. Многогранная поверхность. Многогранные углы. Теорема Эйлера. Правильные многогранники. Преобразования симметрии фигур. Поворот. Элементы симметрии. Симметрия правильных многогранников, правильных призм и правильных пирамид.

5. Объемы тел и площади их поверхностей.

Объемы простых тел. Зависимость объема тела от площадей его сечений. Объемы цилиндра (призмы), конуса (пирамиды), шара. Площадь выпуклой поверхности. Площадь сферы, площадь поверхности цилиндра, площадь поверхности конуса.

6. Координаты и векторы.

Декартовы координаты в пространстве. Метод координат. Формула для расстояния между точками. Уравнение сферы. Понятие вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Разложение вектора по базису. Векторный метод. Параллельный перенос. Координаты вектора. Действия с векторами и действия с координатами. Скалярное умножение векторов. Уравнение плоскости. Формула расстояния от точки до плоскости.

Программа углубленного курса геометрии среднего (полного) общего образования по математике (10—11 классы), по учебнику «Геометрия.10—11», авторы — А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели курса геометрии старшей школы (10—11 классы) включают *общие* цели изучения математики, с которых начинается Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования по математике, а также содержат цели, *специфические* именно для курса геометрии старшей школы:

1) систематическое изучение свойств геометрических фигур в пространстве и развитие пространственного мышления;

2) развитие логического мышления при изучении систематического дедуктивного курса стереометрии;

3) развитие практического понимания геометрии, ее возможностей для описания свойств реальных предметов и их взаимного расположения;

4) подготовка геометрического аппарата, необходимого для изучения смежных дисциплин в школе, а также для профессиональной подготовки, для изучения математики в высших и в средних специальных учебных заведениях.

К курсу геометрии углубленного уровня к тем требованиям, которые были у базового уровня, т. е. общеобразовательной и общекультурной подготовки учеников, в Федеральных государственных образовательных стандартах добавляются дополнительно такие требования:

1) сформированность представлений о необходимости доказательств при обосновании математических утверждений

и роли аксиоматики в проведении дедуктивных рассуждений;

2) знания основных теорем, формул и умения доказывать теоремы;

3) сформированность умений моделировать реальные ситуации, исследовать построенные модели, интерпретировать полученный результат.

Содержание программы, соответствующей учебнику «Геометрия. 10—11», охватывает весь раздел «Геометрия» «Фундаментального ядра содержания общего образования».

Курс стереометрии в учебниках Александрова построен так, что изучать его можно после любого учебника геометрии в основной школе, поскольку плоскость в нем определяется как фигура, на которой выполняется евклидова планиметрия. Каким образом в основной школе была построена планиметрия, не играет никакой роли, так как важнейшие факты евклидовой планиметрии были установлены в любом курсе геометрии основной школы.

В структуре курса стереометрии выделяются три линии: первая линия — это линия *геометрии построений* изучаемых фигур, вторая линия — это линия *геометрии вычислений* величин построенных фигур, а третья линия — это линия *идей и методов современной геометрии*. Ведущей в 10 классе является линия *геометрии построений* (глава 1 «Основания стереометрии» и глава 2 «Перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей»), а в 11 классе ведущими становятся линия *геометрии вычислений* (глава 5 «Объемы тел и площади их поверхностей») и линия *идей и методов современной геометрии* (глава 6 «Координаты и векторы»).

Две центральные главы учебника «Геометрия. 10—11» — глава 3 «Фигуры вращения» (10 класс) и глава 4 «Многогранники» (11 класс) — посвящены основному предмету стереометрии — геометрическим телам и их поверхностям. Они носят во многом описательный, наглядный характер. Много внимания в этих главах уделяется *симметрии* изучаемых тел — важнейшему общекультурному понятию.

Элементы планиметрии в углубленном курсе геометрии распределены равномерно по всему учебнику и включены в близкие по тематике разделы стереометрии. Так сделано, чтобы планиметрический материал не отодвигал на второй план главную задачу курса геометрии в старших классах — изучение стереометрии. Это позволяет на высоком уровне сохранять планиметрическую подготовку старшеклассников.

Содержание программы

1. Основания стереометрии.

Аксиомы стереометрии. Равенство фигур. Геометрия треугольника. Способы задания прямых и плоскостей в пространстве. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Параллельное *и центральное* проектирования. *Утверждения существования и единственности. Построения на плоскости и в пространстве. Метод геометрических мест и методы преобразований*. Построение пирамид и призм.

2. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.

Перпендикулярность прямой и плоскости. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Связь между перпендикулярностью прямой и плоскости и параллельностью прямых. Основные теоремы о перпендикулярности прямой и плоскости. Угол между плоскостями. Перпендикулярность плоскостей. Параллельность плоскостей. Параллельность прямой и плоскости. Ортогональное проектирование. Теорема о трех перпендикулярах. Расстояние между фигурами. Расстояние между фигурами и параллельность. Сонаправленность лучей. Угол между лучами. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью.

3. Фигуры вращения.

Сфера и шар. Взаимное расположение сферы и плоскости. Касательная плоскость сферы. Симметрия сферы и шара. Цилиндр. Конус. Усеченный конус. Конические сечения. *Геометрия окружности.*

4. Многогранники.

Призма как частный случай цилиндра. Правильная призма. Параллелепипед. Пирамида как частный случай конуса. Правильная пирамида. Тела и их поверхности. Многогранники. Многогранная поверхность. Многогранные углы. Теорема Эйлера. Правильные многогранники. Построение правильных многогранников. *Золотое сечение*. Преобразования симметрии фигур. Поворот. Элементы симметрии. Симметрия правильных многогранников, правильных призм и правильных пирамид. *Полуправильные многогранники.*

5. Объемы тел и площади их поверхностей.

Объемы простых тел. Зависимость объема тела от площадей его сечений. Объемы цилиндра (призмы), конуса (пирамиды), шара. Площадь выпуклой поверхности. Площадь сферы, площадь поверхности цилиндра, площадь поверхности конуса.

6. Координаты и векторы.

Декартовы координаты в пространстве. Метод координат. Формула для расстояния между точками. Уравнение сферы. Понятие вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Разложение вектора по базису. Векторный метод. Параллельный перенос. Координаты вектора. Действия с векторами и действия с координатами. Скалярное умножение векторов. Уравнение плоскости. Формула расстояния от точки до плоскости.

Примерное планирование учебного материала

I вариант: базовый курс (всего 102 ч — 51 ч в 10 классе и 51 ч в 11 классе; 1,5 ч в неделю)

II вариант: углубленный курс (всего 136 ч — 68 ч в 10 классе и 68 ч в 11 классе; 2 ч в неделю)

Основное содержание по темам	**Количество часов**		**Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)**
	I	**II**	
Введение	**2**	**2**	
Стереометрия. Важнейшие пространственные фигуры. Структура теории и задач			Ориентировать учеников в предмете стереометрии, восстановить представления о важнейших пространственных фигурах, дать простейшие правила изображения этих фигур и рекомендации о работе с учебником
Глава 1. Основания стереометрии (12 ч — I вариант; 20 ч — II вариант)			
Аксиомы стереометрии. Классификация взаимного расположение двух плоскостей. Классификация взаимного расположе-	**2**	**6**	Определять плоскость как фигуру, в которой выполняется планиметрия. Делать простейшие логические выводы из аксиоматики плоскости. Приводить примеры реальных объектов, идеа-

ния прямой и плоскости. Равенство фигур. Полупространство			лизацией которых являются аксиомы геометрии. Делать простейшие рисунки и находить ошибки в неверных рисунках. Видеть и рисовать на поверхностях многогранников равные плоские фигуры, прежде всего — равные треугольники
Теоремы о задании прямых и плоскостей в пространстве: задание прямой двумя точками; задание плоскости тремя точками, не лежащими на одной прямой; задание плоскости прямой и точкой; задание плоскости двумя пересекающимися прямыми	**2**	**2**	Формулировать перечисленные теоремы. Приводить примеры реальных ситуаций, идеализацией которых они являются. Доказывать какую-нибудь из них. Рисовать различные сечения тетраэдра и вычислять их площади
Взаимное расположение двух прямых в пространстве: пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые	**3**	**3**	Давать классификацию взаимного расположения двух прямых в пространстве. Приводить примеры реальных ситуаций взаимного расположения прямых. Распознавать на моделях и чертежах взаимное расположение прямых в пространстве. Формулировать и доказывать признаки скрещивающихся прямых. Формулировать утверждения о параллельных прямых в пространстве
Параллельное проектирование. Свойства параллельного проектирования. Изображение важнейших фигур в параллельной проекции.	**2**	**2**	Объяснять, как выполняется параллельное проектирование точки на плоскость и параллельное проектирование фигур на плоскость. Формулировать свойства параллельного проектирования. Изображать в параллельной проекции треуголь-

Продолжение

Основное содержание по темам	Количество часов		Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
Центральное проектирование			ники, параллелограммы, параллелепипеды, тетраэдры, правильные четырехугольные пирамиды. Иметь понятие о центральном проектировании и об истории работ по теории перспективы
Существование и единственность. Построения в пространстве как теоремы существования	2	6	Выделять из формулировок доказанных ранее теорем утверждения о существовании и утверждения о единственности. Задачи на построение как конструктивные теоремы существования. Две стороны в решении задач на построение на плоскости (теоретическая — алгоритм построения — и практическая — реализация этого алгоритма) и лишь чисто теоретическая сторона при решении задач на построение в пространстве. Объяснять, как строятся пирамиды и призмы
Контрольная работа № 1	**1**	**1**	
Глава 2. Перпендикулярность и параллельность прямых и плоскостей (25 ч — I вариант; 26 ч — II вариант)			
Перпендикулярность прямой и плоскости. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.	1 2	1 2	Формулировать определения перпендикулярности прямой и плоскости и перпендикуляра из точки на плоскость. Доказывать единственность перпендикуляра и его характерное свойство

Связь между параллельностью прямых и перпендикулярностью прямой и плоскости. Основные теоремы о перпендикулярности прямой и плоскости	2 1	2 1	быть кратчайшим. Доказывать признак перпендикулярности прямой и плоскости. Приводить примеры, в которых присутствует перпендикулярность прямой и плоскости в законах физики и в реальной жизни. Формулировать и применять при решении задач остальные теоремы о перпендикулярности прямой плоскости. Строить сечения многогранников, перпендикулярные их ребрам
Двугранный угол. Линейный угол двугранного угла. Угол между плоскостями. Перпендикулярность плоскостей. Свойства взаимно перпендикулярных плоскостей. Признак перпендикулярности плоскостей	3	3	Формулировать определение двугранного угла и пояснять аналогию его с определением угла в планиметрии, приводить примеры реальных двугранных углов. Величина двугранного угла, взаимно перпендикулярные плоскости. Доказывать свойства и признаки перпендикулярности плоскостей. Указывать реальные ситуации, связанные с отношениями перпендикулярности прямых и плоскостей. Решать задачи на изображение перпендикулярных плоскостей и на вычисление углов между плоскостями
Контрольная работа № 2	1	1	
Параллельность плоскостей. Параллельность прямой и плоскости. Теорема о плоскости, проходящей через данную точку и параллельной данной плоскости. Признаки параллельности плоскостей. Признаки параллельности прямой и плоскости	3 1	3 2	Выполнять построение плоскости, параллельной данной плоскости и проходящей через данную точку. Рисовать сечения многогранников, параллельные некоторой плоскости. Доказывать признак параллельности прямой и плоскости. Приводить примеры реальных ситуаций параллельности прямых и плоскостей

Продолжение

Основное содержание по темам	Количество часов		Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
Ортогональное проектирование на прямую и на плоскость. Теорема о трех перпендикулярах. Расстояние от точки до фигуры. Расстояние от точки до плоскости. Площадь проекции многоугольника	**3**	**3**	Объяснять, как выполняется ортогональное проектирование точки на плоскость и ортогональное проектирование фигур на плоскость. Рисовать ортогональные проекции фигур. Доказывать теорему о трех перпендикулярах и применять ее при решении задач. Находить расстояния от точки до различных фигур. Приводить примеры реальных ситуаций, в которых ищется расстояние от точки до фигуры
Расстояние между фигурами. Расстояние между параллельными плоскостями. Расстояние между плоскостью и параллельной ей прямой. Расстояние между скрещивающимися прямыми	**3**	**3**	Формулировать определение расстояния между фигурами и находить его для конкретных фигур. Понимать, что параллельность — это постоянство расстояний от точек одной фигуры до другой, и что именно это характерное свойство применяется в строительной практике
Сонаправленность лучей. Угол между лучами. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью	**4**	**4**	Формулировать определение сонаправленности лучей и доказывать его транзитивность. Доказывать теорему о равенстве углов с сонаправленными сторонами. Вычислять углы между прямыми в пространстве и углы между прямой и плоскостью
Контрольная работа № 3	**1**	**1**	

Глава 3. Фигуры вращения (10 ч — I вариант; 18 ч — II вариант)			
Сфера и шар. Взаимное расположение шара и плоскости. Пересечение шара и плоскости. Касательная плоскость сферы. Большие окружности сферы. Центральная и зеркальная симметрии сферы и шара. Сфера — фигура вращения	**3** **1**	**3** **1**	Формулировать определения сферы, шара, радиуса, диаметра и указать на их аналогию с определениями окружности, круга, радиуса и диаметра в планиметрии. Формулировать теорему о пересечении шара и плоскости и доказывать теорему о касательной плоскости к сфере. При решении задач о сфере и шаре формулировать аналогичные задачи про окружность и круг. Объяснять, что значит: сфера и шар обладают центральной и зеркальной симметриями, а также являются фигурами вращения. Определить вписанные в сферу и описанные вокруг сферы многогранники
Цилиндр. Свойства цилиндра. Прямой цилиндр. Цилиндр вращения. Поверхность цилиндра вращения. Цилиндры в практике	**2**	**2**	Объяснять, как строится цилиндр с произвольным основанием. Вывести из этого построения свойства цилиндра. Определить прямой цилиндр и цилиндр вращения. Приводить примеры реальных цилиндров. Рассмотреть цилиндры, вписанные в сферу и описанные вокруг нее
Конус. Сечения конуса плоскостью, параллельной основанию конуса. Конус вращения. Поверхность конуса вращения. Усеченный конус. Конические сечения	**3**	**3**	Объяснять, как строится конус с произвольным основанием. Доказать теорему о сечении конуса плоскостью, параллельной основанию. Определить конус вращения. Рассмотреть его поверхность. Объяснять, как строится усеченный конус с произвольным основанием. Классифицировать конические сечения. Приводить

Продолжение

Основное содержание по темам	Количество часов		Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
			реальные примеры конусов и конических сечений. Рассмотреть конусы, вписанные в сферу и описанные вокруг сферы
Геометрия окружности. Окружности и углы. Пропорциональность отрезков хорд и секущих. Вычисление радиусов окружностей, описанных вокруг треугольника и вписанных в него. Вписанные и описанные четырехугольники	—	8	Знать теоремы об измерении угла, вершина которого лежит внутри круга и вне круга, и уметь доказывать их. Знать теорему об измерении угла между касательной к окружности и ее хордой, и доказывать ее. Знать теоремы о пропорциональности отрезков хорд и секущих. Уметь вычислять радиусы вписанной (описанной) окружности в (вокруг) треугольнике через его стороны. Знать свойство и признак вписанного (описанного) четырехугольника
Контрольная работа № 4	1	1	
Резерв (2 ч)			
Глава 4. Многогранники (13 ч — I вариант; 19 ч — II вариант)			
Призма как частный случай цилиндра. Правильная призма. Параллелепипед	3	4	Формулировать определение призмы как цилиндра, основание которого — многоугольник. Называть элементы призмы. Повторить определение правильной призмы. Повторить свойства параллелепипеда. Приводить примеры призм

			в практике. Решать вычислительные задачи о призме и строить сечения призм
Пирамида как частный случай конуса. Правильная пирамида. Характерные свойства правильной пирамиды. Конусы и пирамиды в практике	**4**	**6**	Формулировать определение пирамиды, как конуса, основание которого — многоугольник. Называть элементы пирамиды. Повторить определение правильной пирамиды. Доказывать теорему о характерном свойстве правильной пирамиды. Приводить примеры реальных пирамид. Решать вычислительные задачи о пирамидах и строить сечения пирамид
Понятие геометрического тела. Определение многогранника. Элементы многогранника. Выпуклые многогранники. Теорема Эйлера. Многогранная поверхность и развертка	**2**	**4**	Иметь наглядное представление о геометрических телах и их поверхностях. Определять многогранник как тело, граница которого состоит из конечного числа многоугольников. Формулировать определения выпуклого многогранника и его элементов. Проверить теорему Эйлера на конкретных многогранниках. Строить развертки и клеить из них многогранники
Правильные многогранники. Классификация правильных многогранников. Построение правильных многогранников. Преобразования симметрии. Поворот вокруг прямой. Симметрия правильных многогранников	**3**	**4**	Формулировать определение правильного многогранника и классифицировать правильные многогранники. Клеить из разверток правильные многогранники. Исследовать симметричность правильных многогранников
Контрольная работа № 5	**1**	**1**	

Продолжение

Основное содержание по темам	Количество часов		Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
Глава 5. Объемы тел и площади их поверхностей (17 ч — I вариант; 19 ч — II вариант)			
Определение объема. Простые тела	**—**	**1**	Формулировать определение простого тела и приводить примеры простых и непростых тел. Формулировать определение объема тела и знать основные свойства объема. Знать, что такое единичный куб. Формулировать, какие тела называются равновеликими
Понятие объема простого тела. Равновеликие тела. Объем прямого цилиндра. Зависимость объема тела от площадей его сечений	**2**	**2**	Формулировать определение объема простого тела. Знать формулу объема прямого цилиндра и применять эту формулу для вычисления объемов
Объемы цилиндров (в частности, призм), конусов (в частности, пирамид), шара	**6**	**6**	Знать формулы для вычисления объемов цилиндров, призм, конусов, пирамид и шара и применять их для вычисления объемов этих тел
Контрольная работа № 6	**1**	**1**	
Понятие площади выпуклой поверхности. Площадь сферы. Площади поверхностей цилиндра и конуса	**5**	**5**	Объяснять, как вычисляется площадь сферы, и знать формулу площади сферы. Выводить формулы площадей боковых поверхностей цилиндра вращения и конуса вращения, рассматривая

			развертки этих поверхностей. Применять эти формулы для вычисления площадей
Решение задач	**2**	**3**	
Контрольная работа № 7	**1**	**1**	
Глава 6. Координаты и векторы (15 ч — I вариант; 16 — II вариант)			
Прямоугольные координаты в пространстве. Формула для расстояния между точками в пространстве. Метод координат. Уравнение сферы	**4**	**4**	Объяснять, как вводятся прямоугольные координаты в пространстве, и рисовать этот процесс. Строить точку по ее координатам. Выводить формулу для расстояния между точками в пространстве и применять ее. Объяснять, в чем состоит метод координат. Выводить уравнение сферы. Решать задачи координатным методом
Понятие вектора. Сонаправленность и равенство векторов. Коллинеарные и компланарные векторы. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Разложение вектора по базису. Векторный метод. Параллельный перенос	**6**	**7**	Вспомнить определение вектора. Формулировать определения сонаправленности векторов и равенства векторов. Вспомнить определения линейных операций с векторами и их свойства. Рисовать разложения вектора по двумерному и трехмерному базису. Иллюстрировать рисунками векторные равенства. Доказать векторным методом теорему о средней линии треугольника и на этом примере пояснить суть векторного метода. Дать определение параллельного переноса и формулировать теорему о классификации движений в пространстве

Продолжение

Основное содержание по темам	Количество часов		Характеристика основных видов деятельности ученика (на уровне учебных действий)
Координаты вектора. Действия с векторами и действия с координатами векторов. Скалярное умножение векторов. Уравнение плоскости. Формула расстояния от точки до плоскости	4	4	Находить координаты вектора в данном базисе и строить вектор по его координатам. Сводить действия с векторами к аналогичным действиям с их координатами. Вспомнить определение скалярного умножения и его свойства. Вычислять с помощью скалярного умножения длины векторов, углы между ними, устанавливать перпендикулярность векторов. Вывести уравнение плоскости и формулу расстояния от точки до плоскости. Решать задачи, сочетая координатный и векторный методы
Контрольная работа № 8	**1**	**1**	
Заключение и повторение (6 ч — I вариант; 14 ч — II вариант)			
Современная геометрия: геометрия на поверхности, геометрия Лобачевского, многомерные пространства. Основания геометрии. Геометрия и действительность	**1**	**1**	Дать выпускникам представление о геометрии как о живой, развивающейся науке, исследующей окружающий нас мир, а также подготовить их к итоговой аттестации
Повторение	**5**	**13**	

Содержание

Учебное издание

Александров Александр Данилович
Вернер Алексей Леонидович
Рыжик Валерий Идельевич
Евстафьева Лариса Петровна

ГЕОМЕТРИЯ
Методические рекомендации
10—11 классы

Пособие для учителей общеобразовательных организаций

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Т. Ю. Акимова*
Младший редактор *Е. А. Трошко*
Художник *А. С. Побезинский*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Технический редактор и верстальщик *Т. М. Якутович*
Корректоры *А. В. Рудакова, Г. Н. Смирнова, И. В. Чернова, И. П. Ткаченко*

Подписано в печать 09.09.13. Формат $60 \times 90^{1}/_{16}$.
Гарнитура Школьная. Печ. л. 9.
Заказ №

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.